Matemática 1
Matemática Básica

Pré-Vestibular
Teoria e Exercícios Propostos

www.editora.coc.com.br
Editora COC – Empreendimentos Culturais Ltda.
R. Deolinda, 70, esq. com a Av. Francisco Junqueira
Tel.: (16) 3603-9500 – CEP 14091-018
Jardim Macedo – Ribeirão Preto-SP

índice.matemática 1

Capítulo 01. Potenciação

Capítulo 02. Radiciação

Capítulo 03. Produtos Notáveis

Capítulo 04. Fatoração

Capítulo 05. Porcentagem

Capítulo 08. Equações

Capítulo 01. Potenciação

1. Definição

Representamos por a^n, a potência de **base** real a e **expoente** inteiro n.

Definimos a potência a^n nos casos abaixo:

- **1º caso:** Expoente inteiro maior que 1.

Potência de expoente inteiro maior que 1 é o produto de tantos fatores iguais à base quantas forem as unidades do expoente.

Assim:

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \; \cdots \cdot a}_{n \text{ fatores iguais}}}$$

Exemplos

a) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

b) $1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

c) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

d) $\left(\dfrac{-2}{5}\right)^2 = \left(\dfrac{-2}{5}\right) \cdot \left(\dfrac{-2}{5}\right) = \dfrac{4}{25}$

- **2º caso: Expoente 1**

Toda potência de expoente 1 é igual à base.

Assim:

$$\boxed{a^1 = a}$$

Exemplos

a) $5^1 = 5$

b) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^1 = \dfrac{3}{5}$

- **3º caso: Expoente zero**

Toda potência de expoente zero é igual a 1.

Assim:

$$\boxed{a^0 = 1}$$

Justificativa: $9 : 9 = 1$

$3^2 : 3^2 = 1$

$3^0 = 1$

- Qualquer base "a" , $a \neq 0$, $a^0 = 1$

Exemplos

a) $5^0 = 1$

b) $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^0 = 1$

- **4º caso: Expoente inteiro negativo**

Toda potência de expoente inteiro negativo e base não-nula é igual à potência de base igual ao inverso da base dada e expoente igual ao oposto do expoente dado.

Assim:

$$\boxed{a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n}$$

Exemplos

a) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 = \dfrac{25}{9}$

b) $\left(\dfrac{-3}{2}\right)^{-3} = \left(\dfrac{-2}{3}\right)^3 = \dfrac{-8}{27}$

c) $(-3)^{-4} = \left(\dfrac{-1}{3}\right)^{-4} = \dfrac{1}{81}$

Observação

Sendo n um número inteiro, temos:

1º $a = 0$ e $n > 0 \Rightarrow a^n = 0$

2º $a = 0$ e $n < 0 \Rightarrow \nexists\, a^n \in \mathbb{R}$

3º $a > 0 \Rightarrow a^n > 0$

4º $a < 0$ e n par $\Rightarrow a^n > 0$

5º $a < 0$ e n ímpar $\Rightarrow a^n < 0$

2. Propriedades

Consideremos os números reais a e b, e os números naturais m e n. Então são válidas as seguintes propriedades.

- P_1: **Produto de potências de mesma base**

Para multiplicarmos potências de mesma base, **conservamos** a base e **adicionamos** os expoentes.

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Justificativa

$$\left.\begin{aligned} a^m &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \cdot a}_{m \text{ vezes}} \\ a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \cdot a}_{n \text{ vezes}} \end{aligned}\right\} a^m \cdot a^n =$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \cdot a}_{m \text{ vezes}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \cdot a}_{(m+n) \text{ vezes}}$$

Assim:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Exemplos

a) $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

b) $4^x \cdot 4^{-x+2} = 4^{x+(-x+2)} = 4^2$

c) $3 \cdot 3^2 \cdot 3^6 = 3^{1+2+6} = 3^9$

- P_2: **Quociente de potências de mesma base**

Para dividirmos potências de mesma base, **conservamos** a base e **subtraímos** os expoentes.

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a \neq 0}$$

Justificativa

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \cdots \cdot a}_{m \text{ vezes}} \quad \text{e} \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \cdots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

1º. Sendo $m > n$, temos

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \cdot a}^{m \text{ vezes}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \cdot a}_{n \text{ vezes}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \cdots \cdot a}_{(m-n) \text{ vezes}} = a^{m-n}$$

2º. Se $m = n$, $\dfrac{a^m}{a^n} = 1 = a^{(m-n)} = a^0 = 1$

3º. Se $m < n$, $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ \cdots \cdot a}_{(n-m) \text{ vezes}}} =$

$$= \left(\frac{1}{a}\right)^{(n-m)} = a^{(m-n)}$$

Exemplos

a) $\dfrac{2^6}{2^2} = 2^{6-2} = 2^4$

b) $\dfrac{5^x}{5^2} = 5^{x-2}$

c) $\dfrac{4^{x+2}}{4^{x-3}} = 4^{(x+2)-(x-3)} = 4^5$

- P_3: **Produto de potências de mesmo expoente**

Para multiplicarmos potências de mesmo expoente, **conservamos o expoente** e multiplicamos as bases.

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$$

Justificativa

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \cdot a}_{(n) \text{ vezes}} \quad \text{e} \quad b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ \cdots \cdot b}_{n \text{ vezes}}$$

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \cdot a}_{n \text{ vezes}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ \cdots \cdot b}_{n \text{ vezes}} =$$

$$= \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot \ \cdots \cdot ab}_{n \text{ vezes}}$$

Assim: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

Exemplos

a) $2^4 \cdot 8^4 = (2 \cdot 8)^4 = 16^4$

b) $x^3 \cdot y^3 \cdot z^3 = (x \cdot y \cdot z)^3$

- P_4: **Quociente de potências de mesmo expoente**

Para dividirmos potências de mesmo expoente, **conservamos o expoente** e dividimos as bases.

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \ b \neq 0}$$

Justificativa

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \cdot a}_{n \text{ vezes}} \quad \text{e} \quad b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ \cdots \cdot b}_{n \text{ vezes}}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \cdot a}^{n \text{ vezes}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ \cdots \cdot b}_{n \text{ vezes}}} =$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \cdots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ vezes}}$$

Assim: $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Exemplos

a) $\dfrac{2^4}{3^4} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4$

b) $\dfrac{x^6 \cdot y^6}{z^6} = \left(\dfrac{x \cdot y}{z}\right)^6$

- P_5: **Potência de uma potência**

Para elevarmos uma potência a um novo expoente, **conservamos** a base e **multiplicamos** os expoentes.

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

Justificativa

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \cdots \cdot a^m}_{n \text{ vezes}}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n \text{ vezes}}} \Rightarrow (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Exemplos

a) $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$

b) $\left(\left(3^2\right)^3\right)^2 = 3^{2 \cdot 3 \cdot 2} = 3^{12}$

Observação

As propriedades apresentadas podem ser estendidas para os expoentes **m** e **n inteiros**.

Exemplos

a) $2^3 \cdot 2^{-2} = 2^{3+(-2)} = 2^1 \quad (P_1)$

b) $\dfrac{5^2}{5^{-3}} = 5^{2-(-3)} = 5^{2+3} = 5^5 \ (P_2)$

c) $5^{-3} \cdot 2^{-3} = (5 \cdot 2)^{-3} = 10^{-3} \ (P_3)$

d) $\dfrac{5^{-2}}{3^{-2}} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25} \ (P_4)$

e) $\left(3^2\right)^{-1} = 3^{2 \cdot (-1)} = 3^{-2} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9} \ (P_5)$

3. Situações Especiais

A. $(-a)^n$ e $-a^n$

As potências $(-a)^n$ e $-a^n$, em geral, apresentam resultados diferentes, pois:

$$\left(-a^n\right)=\underbrace{(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)\cdot\ \cdots\cdot(-a)}_{n\text{ vezes}}$$

e

$$-a^n=-\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot\ \cdots\cdot a)}_{n\text{ vezes}}$$

Exemplos

a) $(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16$

b) $-2^4 = -(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2) = -16$

c) $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$

d) $-2^3 = -(2\cdot 2\cdot 2) = -8$

B. $\left(a^m\right)^n$ e a^{m^n}

As potências $\left(a^m\right)^n$ e a^{m^n}, em geral, apresentam resultados **diferentes**, pois:

$$\left(a^m\right)^n=\underbrace{\left(a^m\right)\cdot\left(a^m\right)\cdot\left(a^m\right)\cdot\ \cdots\cdot\left(a^m\right)}_{n\text{ vezes}}$$

e

$$a^{m^n}=a^{\overbrace{m\cdot m\cdot\ \cdots\cdot m}^{n\text{ vezes}}}$$

Exemplos

a) $\left(3^2\right)^3 = (3^2)\cdot(3^2)\cdot(3^2) = 3^{2\cdot 3} = 3^6$

b) $3^{2^3} = 3^{2\cdot 2\cdot 2} = 3^8$

Exercícios Resolvidos

01. Calcular o valor de $A = 4^0 + (0{,}25)^{-2} - (0{,}5)^{-2}$

Resolução

Sabemos que: $0{,}25=\dfrac{25}{100}=\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

e que: $0{,}5=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$

Logo, teremos: $A=4^0+\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]^{-2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$

Então:

$$A=1+\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=1+2^4-2^2$$

$$A=1+16-4\Rightarrow\boxed{A=13}$$

02. Sendo $x=(2^2)^3$; $y=2^{2^3}$ e $z=2^{3^2}$, calcule o produto $x\cdot y\cdot z$.

Resolução

$x = (2^2)^3 = 2^6$

$y = 2^{2^3} = 2^8$

$z = 2^{3^2} = 2^9$

Então:

$x\cdot y\cdot z = 2^6\cdot 2^8\cdot 2^9 = 2^{23}$

Resposta: 2^{23}

03. Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{9^2\cdot 27^3}{243^2}$

b) $\dfrac{12\cdot 5^{2n+1}-8\cdot 5^{2n}}{60\cdot 25^n}$

Resolução

a) $$\frac{9^2 \cdot 27^3}{243^2}$$

Sabemos que:

$9 = 3^2 \qquad 27 = 3^3 \qquad 243 = 3^5$

Então teremos:

$$\frac{9^2 \cdot 27^3}{243^2} = \frac{\left(3^2\right)^2 \cdot \left(3^3\right)^3}{\left(3^5\right)^2} = \frac{3^4 \cdot 3^9}{3^{10}} =$$

$$= \frac{3^{13}}{3^{10}} = 3^3 = 27$$

Resposta: *27*

b)

$$\frac{12 \cdot 5^{2n+1} - 8 \cdot 5^{2n}}{60 \cdot 25^n} = \frac{12 \cdot 5^{2n} \cdot 5 - 8 \cdot 5^{2n}}{60 \cdot \left(5^2\right)^n} =$$

$$= \frac{\cancel{5^{2n}}(12 \cdot 5 - 8)}{60 \cdot \cancel{5^{2n}}} = \frac{60 - 8}{60} = \frac{52}{60} = \frac{13}{15}$$

Resposta: $\frac{13}{15}$

04. Se $10^m = 64$, então calcule o valor de $10^{\frac{m}{3}}$.

Resolução

$$10^{\frac{m}{3}} = \left(10^m\right)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = \left(4^{\cancel{3}}\right)^{\frac{1}{\cancel{3}}} = 4$$

Resposta: *4*

Capítulo 02. Radiciação

1. Definição

Representamos por $\sqrt[n]{a}$, a raiz n-ésima de *a*, e dizemos que *n* é o **índice** da raiz e *a* é o **radicando.**

Definimos, no conjunto dos números reais, $\sqrt[n]{a}$ nos seguintes casos:

1º caso – Índice natural não-nulo e radicando não-negativo

Sendo *a* um número real não-negativo $(a \geq 0)$ e *n* um número natural não-nulo $(n \neq 0)$, dizemos que $\sqrt[n]{a}$ é o único número b $(b \geq 0)$, tal que $b^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Exemplos

a) $\sqrt[2]{16} = 4$, pois $4^2 = 16$ (raiz quadrada de 16)

b) $\sqrt[4]{81} = 3$, pois $3^4 = 81$ (raiz quarta de 81)

c) $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$ (raiz cúbica de 8)

d) $\sqrt[8]{0} = 0$, pois $0^8 = 0$ (raiz oitava de 0)

e) $\sqrt[1]{5} = 5$, pois $5^1 = 5$ (raiz primeira de 5)

Observação

Por convenção, quando o índice da raiz é 2, dispensamos a sua indicação.

Assim $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2$.

2º caso – Índice natural ímpar e radicando negativo

Sendo *a* número real negativo $(a < 0)$ e *n* um número natural ímpar, dizemos que $\sqrt[n]{a}$ é o único número b $(b < 0)$, tal que $b^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Exemplos

a) $\sqrt[3]{-64} = -4$, pois $(-4)^3 = -64$

(raiz cúbica de – 64)

b) $\sqrt[5]{-32} = -2$, pois $(-2)^5 = -32$

(raiz quinta de – 32)

2. Raiz Quadrada do Quadrado de um Número

Sendo *a* um número real, dizemos que $\sqrt{a^2}$ é um número não-negativo que elevado ao quadrado resulta *a*, ou seja:

$$\sqrt{a^2} = |a| \text{ onde } |a| = \begin{cases} a, \text{ se } a \geq 0 \\ -a, \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

Exemplos

a) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = -(-3) = 3$

b) $\sqrt{4^2} = |4| = 4$

c) $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = \left|2-\sqrt{3}\right| = 2-\sqrt{3}$

pois $2-\sqrt{3} > 0$

d) $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} = \left|2-\sqrt{5}\right| = -\left(2-\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}-2$

pois $2-\sqrt{5} < 0$

Observação

Devemos não confundir $\sqrt{4}=2$ com $\sqrt{4}=\pm 2$, que é falso de acordo com a definição.

Então: $2=\sqrt{4}$ e $-2=-\sqrt{4}$

Se considerarmos a equação $x^2 = 4$, teremos como solução as raízes 2 e -2, pois:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$$

3. Potências com Expoente Racional

Definição

Potência de base a ($a > 0$) e expoente racional $\frac{m}{n}\left(m \in Z \text{ e } n \in N^*\right)$ é o número:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplos

a) $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

b) $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^1} = 2$

c) $4^{\frac{-1}{2}} = \sqrt[2]{4^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

d) $1024^{-0,1} = 1024^{\frac{-1}{10}} = \sqrt[10]{\frac{1}{1024}} = \frac{1}{2}$

Observação

Todas as propriedades apresentadas para potências de expoentes inteiros são válidas para expoentes racionais.

4. Propriedades

Consideraremos os números reais a e b não-negativos e os números naturais não-nulos m, n e p. Então:

P_1: Produto de radicais de mesmo índice

Para multiplicarmos radicais com o mesmo índice, conservamos o índice e multiplicamos os radicandos.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Justificativa

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Exemplos

a) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt[3]{4 \cdot x^2 \cdot y \cdot z} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y} . \sqrt[3]{z}$

P_2: Divisão de radicais de mesmo índice

Para dividirmos radicais com o mesmo índice, conservamos o índice e dividimos os radicandos.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad (b \neq 0)$$

Justificativa

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Exemplos

a) $\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{6}{2}} = \sqrt[3]{3}$

b) $\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$

P_3: Potência de uma raiz

Para elevarmos uma raiz a um expoente, basta elevarmos o radicando a esse expoente.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Justificativa

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Observação

A propriedade P_3 também é válida quando o expoente m é inteiro negativo.

Exemplos

a) $\left(\sqrt{5}\right)^3 = \sqrt{5^3}$

b) $\left(\sqrt[3]{15}\right)^{-2} = \sqrt[3]{15^{-2}}$

c) $\left(\sqrt[3]{10}\right)^3 = \sqrt[3]{10^3} = 10$

P_4: Raiz de outra raiz

Para obtermos a raiz de uma outra raiz, basta conservarmos o radicando e multiplicarmos os índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Justificativa

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{\frac{1}{m}}{n}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Exemplos

a) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{5}} = \sqrt[3 \cdot 2]{5} = \sqrt[6]{5}$

b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[2 \cdot 2 \cdot 2]{2} = \sqrt[8]{2}$

P_5: Simplificação de radicais

Quando multiplicamos ou dividimos o índice de uma raiz e o expoente de seu radicando por um mesmo número natural não-nulo, o valor da raiz não altera.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} \quad (c \neq 0)$$

Justificativa

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot p}{n \cdot p}} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Exemplos

a) $\sqrt[3]{10^2} = \sqrt[3 \cdot 2]{10^{2 \cdot 2}} = \sqrt[6]{10^4}$

b) $\sqrt{2^5} = \sqrt[2 \cdot 4]{2^{5 \cdot 4}} = \sqrt[8]{2^{20}}$

c) $\sqrt{5} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[8]{5^4}$

Observação

Como podemos observar nos exemplos, o valor de uma raiz não se altera quando dividimos o índice do radical e o expoente do radicando por um fator comum natural não-nulo.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$$

Exemplos

a) $\sqrt[6]{10^4} = \sqrt[6:2]{10^{4:2}} = \sqrt[3]{10^2}$

b) $\sqrt[8]{2^{20}} = \sqrt[8:4]{2^{20:4}} = \sqrt{2^5}$

c) $\sqrt[8]{5^4} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5}$

5. Simplificação de Radicais

Simplificar um radical significa transformá-lo em uma expressão equivalente ao radical dado, porém escrita de forma mais simples. Obtemos essa transformação através da aplicação das propriedades anteriormente vistas.

Exemplos

a) $\sqrt[3]{81 \cdot x^5 \cdot y^7 \cdot z^3} = \sqrt[3]{3^4 \cdot x^5 \cdot y^7 \cdot z^3} =$

$= \sqrt[3]{3^3 \cdot 3 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot y^6 \cdot y \cdot z^3} =$

$= \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{y^6} \cdot \sqrt[3]{z^3} \cdot \sqrt[3]{3 \cdot x^2 y} =$

$= 3 \cdot xy^2\ z\ \sqrt[3]{3x^2 y}$

b) $\sqrt[5]{a^2 \cdot b^6 \cdot x} = \sqrt[5]{a^2 \cdot b^5 \cdot b \cdot x} = b\sqrt[5]{a^2 bx}$

c) $\sqrt[3]{324} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^4} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^3 \cdot 3} =$

$= 3\sqrt[3]{2^2 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{12}$

6. Redução de Radicais ao Mesmo Índice

Para reduzirmos dois ou mais radicais a um mesmo índice, inicialmente calculamos o MMC de todos os índices, obtendo assim o índice comum a todos os radicais. Em seguida, dividimos o novo índice por todos os índices anteriores, multiplicando o resultado pelos expoentes dos fatores do respectivo radicando.

Exemplos

a) $\sqrt[3]{x y^2}, \sqrt[4]{x^3}$ e $\sqrt{y}$

MMC (3, 4, 2) = 12, então:

$\sqrt[3]{xy^2} = \sqrt[12]{x^4 y^8}; \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^9}; \sqrt{y} = \sqrt[12]{y^6}$

b) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{5}$

MMC (2, 3, 4)=12, então:

$\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6}; \sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4}; \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$

Observações

1) Conforme vimos nas propriedades $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$, a multiplicação e a divisão de raízes só deve ser efetuada se os radicais tiverem índices iguais, então esta operação para reduzir os radicais ao mesmo índice é bastante importante nesses casos.

Exemplo

$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{5^4} \cdot \sqrt[12]{2^6} \cdot \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{5^4 \cdot 2^6 \cdot 3^3}$

2) Para que possamos comparar raízes, também devemos tê-las com os índices iguais, e então a maior raiz será aquela que tiver o maior radicando.

Exemplo

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9} \\ \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$$

Exercícios Resolvidos

01. Efetue as operações indicadas reduzindo a um único radical e simplificando quando possível:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{16} \cdot 3\sqrt[3]{2}$

Resolução

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{16} \cdot 3\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2 \cdot 16 \cdot 2} =$

$= 3\sqrt[3]{64} = 3\sqrt[3]{4^3} = 3 \cdot 4 = 12$

ou

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^4}\cdot 3\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2\cdot 2^4\cdot 2} =$$

$$= 3\sqrt[3]{2^6} = 3\cdot 2^2 = 3\cdot 4 = 12$$

Resposta: *12*

b) $\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{2}}$

Resolução

$$\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8\cdot 10}}{\sqrt{20\cdot 2}} = \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{80}{40}} = \sqrt{2}$$

Resposta $= \sqrt{2}$

02. Calcule:

a) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$

Resolução

$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^6 = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$$

Resposta: *9*

b) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$

Resolução

$$\sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[6]{7}$$

Resposta: $\sqrt[6]{7}$

03. Calcule as potências:

a) $36^{1/2}$

Resolução

$$36^{1/2} = \sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6 \text{ ou } \left(6^2\right)^{1/2} = 6$$

Resposta: *6*

b) $8^{0,666...}$

Resolução

$$8^{0,666...} = 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

ou

$$8^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{2/3} = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$$

Resposta: *4*

04. Calcule o valor de:

$$\sqrt{5} - \sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{25}$$

Resolução

$$\sqrt{5} - \left|2-\sqrt{5}\right| + 5 = \sqrt{5} - (\sqrt{5}-2) + 5 =$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{5} + 2 + 5 = 7$$

Resposta : *7*

7. Racionalização de Denominadores

Racionalizar um denominador significa transformá-lo de um número irracional em um número racional a fim de facilitar o cálculo da divisão. Em termos práticos, racionalizar um denominador significa eliminar o radical do denominador.

A racionalização pode ser feita multiplicando-se o numerador e o denominador da fração por um mesmo fator, obtendo, assim, uma fração equivalente à anterior. Esse fator é chamado **fator de racionalização** ou **fator racionalizante.**

1º caso: Denominadores do tipo $\sqrt[n]{a^m}$

Observemos que:

$$\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^m\cdot a^{n-m}} =$$

$$\sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

Assim, nas frações que apresentarem denominador do tipo $\sqrt[n]{a^m}$, basta multiplicarmos o seu numerador e o seu denominador por $\sqrt[m]{a^{n\,-}}$ (fator racionalizante) para eliminarmos o radical (número irracional) do denominador.

Exemplos

Racionalizar os denominadores:

a) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \dfrac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

c) $\dfrac{6}{5\sqrt{2}} = \dfrac{6}{5\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{5 \cdot \sqrt{2^2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$

Notemos que, se no denominador aparecer uma **raiz quadrada**, o fator racionalizante é outra raiz igual à existente no denominador da fração.

2º caso: Denominadores do tipo $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

Neste caso, vamos relembrar o produto notável $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$. Notamos que este produto notável, aplicado aos denominadores deste caso, produz resultado racional.

Ou seja:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

Portanto, se tivermos que racionalizar denominadores do tipo $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, basta multiplicarmos o numerador e o denominador da fração pelo **conjugado** do denominador, eliminando assim o radical (número irracional) do denominador.

Assim:

denominador: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \rightarrow$ conjugado: $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

denominador: $\sqrt{a} - \sqrt{b} \rightarrow$ conjugado $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

Exemplos

Racionalizar os denominadores:

a) $\dfrac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \dfrac{4}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})} \cdot \dfrac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})} =$

$= \dfrac{4(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = \dfrac{4(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{3}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{(\sqrt{5} - 1)} \cdot \dfrac{(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} + 1)} = \dfrac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{4}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3} = \dfrac{\sqrt{3}}{(2\sqrt{3} + 3)} \cdot \dfrac{(2\sqrt{3} - 3)}{(2\sqrt{3} - 3)} =$

$= \dfrac{\sqrt{3}(2\sqrt{3} - 3)}{12 - 9} = \dfrac{6 - 3\sqrt{3}}{3} = 2 - \sqrt{3}$

Observações

a) Para calcular $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ devemos dividir 3 por $\sqrt{3} = 1{,}7320\ldots$ enquanto, na forma racionalizada dividiremos $\sqrt{3}$ por 3, que, evidentemente, é mais simples.

b) Para calcular $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$ devemos dividir 2 por $\sqrt[3]{5}$ = 1,7099..., na forma racionalizada $\dfrac{2\sqrt[3]{25}}{5}$ dividiremos $2\sqrt[3]{25}$ por 5, que é um pouco mais simples.

c) Para calcular $\dfrac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$ devemos dividir 4 por $\sqrt{5}$ = 2,2360... somada com $\sqrt{2}$ =1,4142...; na forma racionalizada vamos dividir 4 multiplicado por $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ por 3; é um pouco mais simples.

Exercícios Resolvidos

01. Racionalizar o denominador:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{32}}$

Resolução

a) Devemos multiplicar $\sqrt[3]{2}$ *por* $\sqrt[3]{2^2}$*, pois*

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{2^3} = 2$, *logo:*

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{1 . \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} . \sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

Resposta: $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

b) Inicialmente vamos simplificar

$\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2} = 2\sqrt[4]{2}$

Para racionalizar, vamos multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt[4]{2^3}$ *, pois*

$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{2^4} = 2$*, logo:*

$$\frac{2}{\sqrt[4]{32}} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt[4]{2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - \frac{1 \cdot \sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2^3}} - \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

Resposta: $\dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}$

02. Racionalizar o denominador:

a) $\dfrac{3}{3+\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}-3}$

Resolução

a) Note que $(3+\sqrt{3}) \cdot (3-\sqrt{3}) = 9 - 3 = 6$*, logo devemos multiplicar o numerador e o denominador por* $3-\sqrt{3}$*:*

$$\frac{3}{3+\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot (3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{3(3-\sqrt{3})}{(3)^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{3(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{3(3-\sqrt{3})}{6} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

Resposta: $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

b) Vamos multiplicar (numerador e denominador) por $\sqrt{27}+3$*, pois* $(\sqrt{27}-3)(\sqrt{27}+3) =$

$= (\sqrt{27})^2 - (3)^2 = 27 - 9 = 18$*, então:*

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}-3} = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{27}+3)}{(\sqrt{27}-3)(\sqrt{27}+3)} =$$

$$= \frac{\sqrt{81}+3\sqrt{3}}{(\sqrt{27})^2-(3)^2} = \frac{9+3\sqrt{3}}{27-9} =$$

$$= \frac{3(3+\sqrt{3})}{18} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

Resposta: $\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$

03. Calcule:

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

Resolução

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} - \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (1+\sqrt{2}) - 1(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2}) \cdot (1+\sqrt{2})} =$$

$$\frac{1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}}{1-2} = \frac{2\sqrt{2}}{-1} = -2\sqrt{2}$$

Resposta: $-2\sqrt{2}$

Capítulo 03. Produtos Notáveis

Os produtos notáveis obedecem a leis especiais de formação e, por isso, não são efetuados pelas regras normais da multiplicação de polinômios. Apresentam-se em grande número e dão origem a um conjunto de identidades de grande aplicação.

Considere *a* e *b*, expressões em R, representando polinômios quaisquer, apresentamos a seguir os produtos notáveis.

1. Quadrado da Soma de Dois Termos

$$(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

2. Quadrado da Diferença de Dois Termos

$$(a-b)^2 = (a-b)\,(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

3. Produto da Soma pela Diferença de Dois Termos

$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2$$

$$\boxed{(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2}$$

4. Cubo da Soma de Dois Termos

$$(a+b)^3 = (a+b)\,(a+b)^2 = (a+b)\,(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

5. Cubo da Diferença de Dois Termos

$$(a-b)^3 = (a-b)\,(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Exercícios Resolvidos

Desenvolver os produtos notáveis abaixo:

01. $(3x+2)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(2) + (2)^2$

Resposta: $9x^2 + 12x + 4$

02. $\left(\frac{1}{x} + x\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right)\cancel{x} + x^2$

Resposta: $\frac{1}{x^2} + 2 + x^2$

03. $(3x-2y)^2 = (3x)^2 - 2(3x)\,(2y) + (2y)^2$

Resposta: $9x^2 - 12xy + 4y^2$

04. $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{4}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{x^2}{3}\right)\left(\frac{x}{4}\right) + \left(\frac{x}{4}\right)^2$

Resposta: $\frac{x^4}{9} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{16}$

Observe que, quando desenvolvemos o quadrado da soma ou da diferença de um binômio, produzimos um trinômio chamado trinômio quadrado perfeito.

05. $(3xy+5)\,(3xy-5) = (3xy)^2 - (5)^2$

Resposta: $9x^2y^2 - 25$

06. $(3\sqrt{5}+2)(3\sqrt{5}-2) = \left(3\sqrt{5}\right)^2 - (2)^2$

Resposta: $45 - 4 = 41$

07. $(x+2)^3 = (x)^3 + 3(x)^2\,(2) + 3(x)(2)^2 + (2)^3$

Resposta: $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

08. $(2x-2)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2\,(2) + 3\,(2x)(2)^2 - (2)^3$

Resposta: $8x^3 - 24x^2 + 24x - 8$

Capítulo 04. Fatoração

1. Definição

Fatorar uma expressão algébrica é modificar sua forma de soma algébrica para produto; fatorar uma expressão é obter outra expressão que

a) seja equivalente à expressão dada;

b) esteja na forma de produto. Na maioria dos casos, o resultado de uma fatoração é um produto notável.

Há diversas técnicas de fatoração que estudaremos em seguida, supondo a, b, x e y expressões não fatoráveis.

1.1. Fator Comum

Devemos reconhecer o fator comum, seja ele numérico, literal ou misto; em seguida colocamos em evidência esse fator comum, simplificamos a expressão deixando em parênteses a soma algébrica.

Observe os exemplos abaixo.

a) $ax + ay = a\,(x + y)$

b) $12x^2y + 4xy^3 = 4xy\,(3x + y^2)$

1.2. Agrupamento

Devemos dispor os termos do polinômio de modo que formem dois ou mais grupos entre os quais haja um fator comum, em seguida, colocar o fator comum em evidência.

Observe:

$$\boxed{a}\,x + \boxed{a}\,y + \boxed{b}\,x + \boxed{b}\,y =$$

$$= a\,\boxed{(x+y)} + b\,\boxed{(x+y)} =$$

$$= (a+b)(x+y)$$

1.3. Diferença de Quadrados

Utilizamos a fatoração pelo método de diferença de quadrados sempre que dispusermos da diferença entre dois monômios cujas literais tenham expoentes pares. A fatoração algébrica de tais expressões é obtida com os seguintes passos:

1º) Extraímos as raízes quadradas dos fatores numéricos de cada monômio;

2º) Dividimos por dois os expoentes das literais;

3º) Escrevemos a expressão como produto da soma pela diferença dos novos monômios assim obtidos.

Por exemplo, a expressão $a^2 - b^2$ seria fatorada da seguinte forma:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

1.4. Trinômio Quadrado Perfeito

Uma expressão algébrica pode ser identificada como trinômio quadrado perfeito sempre que resultar do quadrado da soma ou diferença entre dois monômios.

Por exemplo, o trinômio $x^4 + 4x^2 + 4$ é quadrado perfeito, uma vez que corresponde a $(x^2+2)^2$.

São, portanto, trinômios quadrados perfeitos todas as expressões da forma $a^2 \pm 2ab + b^2$, fatoráveis nas formas seguintes:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

e

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Exercícios Resolvidos

Fatore as expressões abaixo.

01. $\underbrace{2ax^2+x^2}+\underbrace{6ay+3y}=$

$x^2(2a+1)+3y(2a+1)$

Resposta: $(x^2+3y)(2a+1)$

02. $\underbrace{a^2-2ac}+\underbrace{3abc-6bc^2}=$

$a(a-2c)+3bc(a-2c)=$

Resposta: $(a+3bc)(a-2c)$

03. $4x^2-16y^8=(2x)^2-\left(4y^4\right)^2$

Resposta: $(2x+4y^4)\,(2x-4y^4)$

04. $x^3-3x^2-4x+12=x^2(x-3)-4(x-3)=$

$=(x^2-4)(x-3)$

Resposta: $(x+2)(x-2)(x-3)$

05. $x^2+2xy+y^2=(x+y)(x+y)$

Resposta: $(x+y)^2$

06. $-a^6-6a^3b-9b^2=-(a^6+6a^3b+9b^2)$

Resposta: $-(a^3+3b)^2$

2. Trinômio Quadrado da Forma $ax^2 + bx + c$

Supondo sejam x_1 e x_2 as raízes reais do trinômio, $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), dizemos que:

$$\boxed{ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)\,(x-x_2)}$$

Lembre-se de que as raízes de uma equação de segundo grau podem ser calculadas através da fórmula de Bhaskara:

$$(x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a},\ \text{onde } \Delta=b^2-4ac)$$

3. Soma e Diferença de Cubos

Se efetuarmos o produto do binômio a + b pelo trinômio $a^2 - ab + b^2$, obtemos o seguinte desenvolvimento:

$(a+b)\,(a^2-ab+b^2)=$

$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3 \Rightarrow$

$$\boxed{(a+b)\,(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3}$$

Analogamente, se calcularmos o produto de $a - b$ por $a^2 + ab + b^2$, obtemos $a^3 - b^3$.

O que acabamos de desenvolver foram produtos notáveis que nos permitem concluir que, para fatorarmos uma soma ou diferença de cubos, basta-nos inverter o processo anteriormente demonstrado.

Assim, dizemos que

$$a^3+b^3=(a+b)\,(a^2-ab+b^2)$$

e

$$a^3-b^3=(a-b)\,(a^2+ab+b^2)$$

Exercícios Resolvidos

Fatorar as expressões seguintes:

01. $2x^2 - 10x + 12 = 2\,(x^2 - 5x + 6)$

Resposta: $2\,(x-3)\,(x-2)$

02. $x^2 - 4x - 21$

Resposta: $(x+3)\,(x-7)$

03. $x^3 + 8 = x^3 + 2^3$

Resposta: $(x+2)\,(x^2-2x+4)$

04. $a^3 - 8b^3 = a^3 - (2b)^3$

Resposta: $(a-2b)\,(a^2+2ab+4b^2)$

Capítulo 05. Porcentagem

1. Introdução

Em conversa com um amigo, ele me diz:

O meu aluguel subiu R$ 200,00.

Para avaliarmos se o aumento foi grande ou pequeno, é preciso compararmos o acréscimo com o valor anterior do aluguel. Isto pode ser feito analisando o quociente entre os dois valores.

Assim, se o valor do aluguel era R$ 1 000,00 esta razão é $\frac{200}{1000}$, que costumeiramente analisamos deixando o denominador da fração igual a 100.

Desta forma:

$$\frac{200}{1000}=\frac{20}{100}$$

Interpretamos a razão $\frac{20}{100}$ dizendo que se o aluguel fosse R$ 100,00, o aumento teria sido de R$ 20,00. Este modo de compararmos dois números tomando o 100 como padrão, utilizado desde o século XVII e denominado **porcentagem** é o que estudaremos a seguir.

2. Definição

Porcentagem é uma fração de denominador centesimal, ou seja, é uma fração de denominador 100. Representamos porcentagem pelo símbolo % e lê-se: "por cento".

Deste modo, a fração $\frac{20}{100}$ é uma porcentagem que podemos representar por 20%.

3. Forma Decimal

É comum representarmos uma porcentagem na forma decimal, por exemplo, 75% na forma decimal seria representado por 0,75.

$$75\%=\frac{75}{100}=0{,}75$$

4. Cálculo de uma Porcentagem

Para calcularmos uma porcentagem p% de V, basta multiplicarmos a fração $\frac{p}{100}$ por V.

$$p\% \text{ de } V=\frac{p}{100}\cdot V$$

Exemplo

$$23\% \text{ de } 240=\frac{23}{100}\cdot 240=55{,}2$$

Exercícios Resolvidos

01. Escrever sob a forma de número decimal as seguintes porcentagens:

a) 23% b) 130%

Resolução

a) $23\%=\frac{23}{100}=0{,}23$

b) $130\%=\frac{130}{100}=1{,}3$

Resposta: *a) 0,23*
b) 1,3

02. (Fuvest-SP) $(10\%)^2$ =

a) 100%
b) 20%
c) 5%
d) 1%
e) 0,1%

Resolução

$$\left(\frac{10}{100}\right)^2=\frac{10}{100}\cdot\frac{10}{100}=\frac{1\cancel{00}}{10\,0\cancel{00}}=\frac{1}{100}=1\%$$

Resposta: *D*

03. Quatro é quantos porcento de cinco?

Resolução

Sendo x% a taxa percentual, temos pela definição que:

$$\frac{x}{100}=\frac{4}{5}\Rightarrow x=80\%$$

ou de outra forma:

$$\frac{4}{5}=0{,}8=\frac{80}{100}=80\%$$

Resposta: *80%*

04. Quanto é 23% de 200 000?

Resolução

$$23\%\ \text{de}\ 200\,000=\frac{23}{100}\cdot 200\,000=46\,000$$

Resposta: *46 000*

05. Em uma pesquisa de mercado, constatou-se que 67% de uma amostra assistem a um certo programa de TV. Se a população é de 56.000 habitantes, quantas pessoas assistem ao tal programa?

Resolução

$$67\%\ \text{de}\ 56\,000=\frac{67}{100}\cdot 56\,000=37\,520$$

Resposta: *37 520 pessoas.*

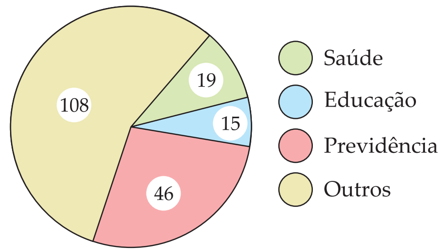
06. Quanto é 20% de 70%?

Resolução

$$20\%\ \text{de}\ 70\%=\frac{20}{100}\cdot\frac{70}{100}=0{,}14\ \text{ou}\ 14\%$$

Resposta: *14%*

07. (Vunesp) O gráfico publicado pela revista *Veja*, de 28/7/99, mostra como são divididos os 188 bilhões de reais do orçamento da União entre os setores de Saúde, Educação, Previdência e outros.



Se os 46 bilhões de reais gastos com a Previdência fossem totalmente repassados aos demais setores de modo que 50% fossem destinados à saúde, 40% à educação e os 10% aos outros, determine o aumento que o setor de Saúde teria:

a) em reais;
b) em porcentagem, em relação à sua dotação inicial, aproximadamente.

Resolução

a) $\frac{50}{100}\cdot 46=23$ *bilhões de reais*

b) $\frac{23}{19}\cong 121\%$

08. (Unicamp-SP) Como se sabe, os *icebergs* são enormes blocos de gelo que se desprendem das geleiras polares e flutuam pelos oceanos. Suponha que a parte submersa de um *iceberg* corresponda a 8/9 do seu volume total e que o volume da parte não submersa é de 135 000 m^3.

a) Calcule o volume total do *iceberg*.

b) Calcule o volume de gelo puro do *iceberg* supondo que 2% de seu volume total é constituído de "impurezas", como matéria orgânica, ar e minerais.

Resolução

V = volume total do iceberg

a) $V-\frac{8}{9}V=135\,000\Rightarrow\frac{1}{9}V=135\,000$

$\Rightarrow V=9\cdot 135\,000\Rightarrow V=1\,215\,000\ m^3$

b) $V_{impurezas}=2\%\ \text{de}\ V=0{,}02\cdot 1\,215\,000=$

$=24\,300\ m^3$

$V_{gelo\ puro}=V-V_{impurezas}=1\,215\,000-24\,300=$

$=1\,190\,700\ m^3$

5. Lucro

Chamamos de lucro em uma transação comercial de compra e venda a diferença entre o preço de venda e o preço de custo.

Lucro = preço de venda – preço de custo.

Caso essa diferença seja negativa, ela será chamada de **prejuízo.**

Assim, podemos escrever:

Preço de custo + lucro = preço de venda.

Preço de custo – prejuízo = preço de venda.

Podemos expressar o lucro na forma de porcentagem de duas formas:

$$\text{Lucro sobre o custo} = \frac{\text{lucro}}{\text{preço de custo}} \cdot 100\%$$

$$\text{Lucro sobre a venda} = \frac{\text{lucro}}{\text{preço de venda}} \cdot 100\%$$

Observação – A mesma análise pode ser feita para o caso de prejuízo.

Exemplo

Uma mercadoria foi comprada por R$ 500,00 e vendida por R$ 800,00. Pede-se:

a) o lucro obtido na transação;

b) a porcentagem de lucro sobre o preço de custo;

c) a porcentagem de lucro sobre o preço de venda.

Resolução

a) Lucro = 800 – 500 ⇒ Lucro = R$ 300,00

b) $L_C = \frac{300}{500} = 0{,}60 = 60\%$

c) $L_V = \frac{300}{800} = 0{,}375 = 37{,}5\%$

Exercícios Resolvidos

01. Um objeto custa R$ 75,00 e é vendido por R$ 100,00. Determinar:

a) a porcentagem de lucro em relação ao preço de custo;

b) a porcentagem de lucro em relação ao preço de venda.

Resolução

Preço de custo + lucro = preço de venda

75 + lucro =100

Lucro = R$ 25,00

a) $\frac{lucro}{preço\ de\ custo} \cdot 100\% \cong 33{,}33\%$

b) $\frac{lucro}{preço\ de\ venda} \cdot 100\% = 25\%$

02. (PUC-SP) O preço de venda de um bem de consumo é R$ 100,00. O comerciante tem um ganho de 25% sobre o preço de custo deste bem. O valor do preço de custo é:

a) R$ 25,00
b) R$ 70,50
c) R$ 75,00
d) R$ 80,00
e) R$ 125,00

Resolução

Ganho = lucro

$$\frac{lucro}{preço\ de\ custo} \cdot 100\% = 25\% \Rightarrow$$

⇒ lucro = 0,25 · (preço de custo)

Preço de custo + lucro = preço de venda

Preço de custo + 0,25 (preço de custo) = preço de venda

1,25 · (preço de custo) = 100

Preço de custo = R$ 80,00

Resposta: *D*

03. (Cesgranrio-RJ) João vendeu dois rádios por preços iguais. Um deles foi vendido com lucro de 20% sobre o preço de custo e o outro com prejuízo de 20% sobre o preço de custo. No total, em relação ao capital investido, João:

a) lucrou 4%.

b) lucrou 2%.

c) perdeu 4%.

d) perdeu 2%.

e) não lucrou nem perdeu.

Resolução

Chamando os rádios de 1 e 2 temos:

$Pv_1 = Pv_2 = P$

Total arrecadado $= 2P$

$$\frac{L_1}{Pc_1} \cdot 100\% = 20\%$$

$L_1 = 0{,}2\ Pc_1$

$Pc_1 + L_1 = Pv_1$

$Pc_1 + 0{,}2\ Pc_1 = P$

$$Pc_1 = \frac{P}{1{,}2}$$

$$\frac{Prejuízo_2}{Pc_2} = 20\%$$

$Prej_2 = 20\%\ Pc_2$

$Pc_2 - Prejuízo_2 = Pv_2$

$Pc_2 - 0{,}2\ Pc_2 = P$

$$Pc_2 = \frac{P}{0{,}8}$$

$$\text{Capital investido} = Pc_1 + Pc_2 = \frac{P}{1{,}2} + \frac{P}{0{,}8} = \frac{25}{12}P$$

$$\text{Capital investido} = \frac{25}{12}P;$$

$$\text{Capital arrecadado} = 2p = \frac{24}{12}P$$

Capital arrecadado < capital investido $\therefore$ *teve prejuízo (perdeu)* $\frac{1}{12}P$

$$\frac{\text{Prejuízo}}{\text{capital investido}} = 100\% = \frac{\frac{1}{12}P}{\frac{25}{12}P} = \frac{1}{25} = 4\%$$

Resposta: *C*

6. Aumento Percentual

Consideremos um valor inicial V que deve sofrer um aumento de $p\%$ de seu valor. Chamemos de A o valor do aumento e V_A o valor após o aumento. Então,

$$\boxed{A = p\% \text{ de } V = \frac{p}{100} \cdot V}$$

$$V_A = V + A = V + \frac{p}{100} \cdot V$$

$$\boxed{V_A = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot V}$$

em que $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ é o fator de aumento.

Exemplos

Valor inicial	Aumento percentual	Fator de aumento	Valor aumentado
50	24%	1,24	1,24 · 50
40	5%	1,05	1,05 · 40
70	250%	3,50	3,50 · 70

7. Desconto Percentual

Consideremos um valor inicial V que deve sofrer um desconto de $p\%$ de seu valor. Chamemos de D o valor do desconto e V_D o valor após o desconto. Então,

$$\boxed{D = p\% \text{ de } V = \frac{p}{100} \cdot V}$$

$$V_D = V - D = V - \frac{p}{100} \cdot V$$

$$\boxed{V_D = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot V}$$

em que $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ é o fator de desconto.

Exemplos

Valor inicial	Desconto percentual	Fator de desconto	Valor descontado
50	24%	0,76	$0{,}76 \cdot 50$
40	5%	0,95	$0{,}95 \cdot 40$
70	1,5%	0,985	$0{,}985 \cdot 70$

Exercícios Resolvidos

01. Dado o valor V, exprimir em função de V:

a) o valor de um aumento de 20%;

b) o valor após um aumento de 20%;

c) o valor de um desconto de 30%;

d) o valor após um desconto de 30%.

Resposta

a) 0,2 V | *c) 0,3 V*

b) 1,20 V | *d) 0,7 V*

02. (Fuvest-SP) Aumentando-se os lados a e b de um retângulo de 15% e 20%, respectivamente, a área do retângulo é aumentada de:

a) 35%

b) 30%

c) 3,5%

d) 3,8%

e) 38%

Resolução

Área inicial: $a \cdot b$

Área final: $1{,}15 \cdot a \cdot 1{,}20 \cdot b = 1{,}38 \cdot a \cdot b = 1{,}38 \cdot$ *área inicial* $\Rightarrow$ *aumento de 38%.*

Resposta: *E*

03. Uma empresa admite um funcionário no mês de janeiro sabendo que, já em março, ele terá 40% de aumento. Se a empresa deseja que o salário desse funcionário, a partir de março, seja R$ 3 500,00, com que salário deve admiti-lo?

Resolução

$V_A = 1{,}4 \cdot V$

$3\,500 = 1{,}4 \cdot V$

$$V = \frac{3500}{1{,}4} = 2\,500$$

Resposta: *R$ 2 500,00*

04. (Vunesp) O dono de um supermercado comprou de seu fornecedor um produto por x reais (preço de custo) e passou a revendê-lo com lucro de 50%. Ao fazer um dia de promoções, ele deu aos clientes do supermercado um desconto de 20% sobre o preço de venda deste produto. Pode-se afirmar que, no dia de promoções, o dono do supermercado teve, sobre o preço de custo:

a) prejuízo de 10%.

b) prejuízo de 5%.

c) lucro de 20%.

d) lucro de 25%.

e) lucro de 30%.

Resolução

$$V_A = \left(1 + \frac{50}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) x = 1{,}2x$$

$$V_A = 1{,}2x = \left(1 + \frac{20}{100}\right) x$$

Então, lucro de 20%

Resposta: *C*

8. Aumentos e Descontos Sucessivos

Consideremos um valor inicial V, e vamos considerar que ele irá sofrer dois aumentos sucessivos de p_1% e p_2%. Sendo V_1 o valor após o primeiro aumento, temos:

$$V_1 = V \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right)$$

Sendo V_2 o valor após o segundo aumento, temos:

$$V_2 = V_1 \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right)$$

$$\boxed{V_2 = V \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right)}$$

Sendo V um valor inicial, vamos considerar que ele irá sofrer dois descontos sucessivos de p_1% e p_2%.

Sendo V_1 o valor após o primeiro desconto, temos:

$$V_1 = V \cdot \left(1 - \frac{c_1}{100}\right)$$

Sendo V_2 o valor após o segundo desconto, temos:

$$V_2 = V_1 \cdot \left(1 - \frac{c_2}{100}\right)$$

$$\boxed{V_2 = V \cdot \left(1 - \frac{c_1}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{c_2}{100}\right)}$$

Sendo V um valor inicial, vamos considerar que ele irá sofrer um aumento de p_1% e, sucessivamente, um desconto de p_2%.

Sendo V_1 o valor após o aumento, temos:

$$V_1 = V \cdot \left(1 + \frac{c_1}{100}\right)$$

Sendo V_2 o valor após o desconto, temos:

$$V_2 = V_1 \cdot \left(1 - \frac{c_2}{100}\right)$$

$$\boxed{V_2 = V \cdot \left(1 + \frac{c_1}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{c_2}{100}\right)}$$

Exercícios Resolvidos

01. (Mackenzie–SP) Um produto teve um aumento total de preço de 61% através de 2 aumentos sucessivos.

Se o 1° aumento foi de 15%, então o 2º foi de:

a) 38%
b) 40%
c) 42%
d) 44%
e) 46%

Resolução

1º Aumento

$$V_A = \left(1 + \frac{15}{100}\right) V = 1{,}15\,V$$

2º Aumento

$$V_A = \left(1 + \frac{a}{100}\right) \cdot 1{,}15V = 1{,}61\,V$$

$$1 + \frac{a}{100} = 1{,}4$$

$$\boxed{a = 40\%}$$

Resposta: *B*

02. (Fuvest-SP) Barnabé tinha um salário de x reais em janeiro. Recebeu aumento de 80% em maio e 80% em novembro. Seu salário atual é:

a) 2,56 x
b) 1,6x
c) x + 160
d) 2,6x
e) 3,24x

Resolução

$$S_A = \left(1 + \frac{80}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{80}{100}\right) \cdot x$$

$$S_A = 1{,}8 \cdot 1{,}8x$$

$$S_A = 3{,}24x$$

Resposta: *C*

03. (Vunesp) Uma instituição bancária oferece um rendimento de 15% ao ano para depósitos feitos numa certa modalidade de aplicação financeira. Um cliente deste banco deposita 1 000 reais nessa aplicação. Ao final de n anos, o capital que esse cliente terá em reais, relativo a esse depósito, é:

a) 1 000 + 0,15n
b) 1 000 · 0,15n
c) 1 000 · $0{,}15^n$
d) 1 000 + $1{,}15^n$
e) 1 000 · $1{,}15^n$

Resolução

$$V_A = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot v \qquad V_A = 1000 \cdot (1{,}15)^n$$

$$V_A = \left(1 + \frac{15}{100}\right)^n \cdot 1000$$

Resposta: *E*

04. (PUC-SP) Descontos sucessivos de 20% e 30% são equivalentes a um único desconto de:

a) 25%

b) 26%

c) 44%

d) 45%

e) 50%

Resolução

$$V_D = \left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{30}{100}\right) \cdot v$$

$$V_D = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot V = 0{,}56 \cdot V$$

$$V_D = 0{,}56\ V = \left(1 - \frac{44}{100}\right) \cdot V$$

Assim, o valor de desconto é 44 %.

Resposta: *C*

05. (Fuvest–SP) A cada ano que passa o valor de um carro diminui em 30% em relação ao seu valor do ano anterior. Se *V* for o valor do carro no primeiro ano, o seu valor no oitavo ano será:

a) $(0{,}7)^7\ V$

b) $(0{,}3)^7\ V$

c) $(0{,}7)^8\ V$

d) $(0{,}3)^8\ V$

e) $(0{,}3)^9\ V$

Resolução

Relacionando o valor do carro até o oitavo ano, temos:

no 1º ano: V

no 2º ano: $0{,}7\ V$ *(diminuição de 30%)*

no 3º ano: $0{,}7 \cdot (0{,}7\ V) = (0{,}7)^2\ V$

no 4º ano: $0{,}7 \cdot [(0{,}7)^2\ V] = (0{,}7)^3\ V$

no 5º ano: $(0{,}7)^4\ V$

no 6º ano: $(0{,}7)^5\ V$

no 7º ano: $(0{,}7)^6\ V$

no 8º ano: $(0{,}7)^7\ V$

Resposta: *A*

06. (Vunesp) O dono de um supermercado comprou de seu fornecedor um produto por *x* reais (preço de custo) e passou a revendê-lo com lucro de 50%. Ao fazer um dia de promoções, ele deu aos clientes do supermercado um desconto de 20% sobre o preço de venda deste produto. Pode-se afirmar que, no dia de promoções, o dono do supermercado teve, sobre o preço de custo:

a) prejuízo de 10%.

b) prejuízo de 5%.

c) lucro de 20%.

d) lucro de 25%.

e) lucro de 30%.

Resolução

$$V_A = \left(5 + \frac{02}{522}\right) \cdot \left(5 - \frac{x2}{522}\right) x = 5{,}xx$$

$$V_A = 5{,}xx = \left(5 + \frac{x2}{522}\right) x$$

Então, lucro de 20%

Resposta*: C*

Capítulo 06. Múltiplos e Divisores

1. Conceitos Básicos

1.1. Números Naturais

Os números 0, 1, 2, 3, ... formam o conjunto dos números naturais que é representado pelo símbolo N.

Assim sendo:

$$N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Representamos o conjunto dos números naturais não-nulos por N^*.

Assim sendo:

$$N^* = \{1, 2, 3, ...\} = N - \{0\}$$

1.2. Números Inteiros

Os números ..., – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, ... formam o conjunto dos números inteiros que é representado pelo símbolo Z. Assim sendo:

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 2, 3, ...\}$$

Representamos o conjunto dos números inteiros não-nulos por Z^*.

Assim sendo:

$$Z^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$$

Observemos algumas outras notações:

- Z_+: conjunto dos inteiros não-negativos:

$$Z_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\} = N$$

- Z_-: conjunto dos inteiros não-positivos:

$$Z_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$$

- Z^*_+: conjunto dos inteiros positivos:

$$Z^*_+ = \{1, 2, 3, ...\} = N^*$$

- Z^*_-: conjunto dos inteiros negativos:

$$Z^*_-: \{..., -3, -2, -1\}.$$

1.3. Divisor de um Número Inteiro

Sejam m e n dois números inteiros.
Dizemos que m é **divisor** de n, se existir um número k, inteiro, tal que:

$$m \cdot k = n$$

Dizemos que 3 é divisor ou fator de 15, pois existe um número inteiro k (neste caso $k = 5$) tal que:

$$3 \cdot k = 15$$

Dizemos que 4 é divisor ou fator de – 24, pois existe um número inteiro k (neste caso $k = -6$) tal que:

$$4 \cdot k = -24$$

Dizemos que 0 (zero) é divisor ou fator de 0 (zero), pois existe um número inteiro k (neste caso k pode ser qualquer número inteiro), tal que:

$$0 \cdot k = 0$$

No entando, 0 (zero) não é divisor de 5, pois não existe um inteiro k, tal que:

$$0 \cdot k = 5$$

Observemos que 1 é divisor de qualquer número inteiro k, pois sempre vai existir um número inteiro k tal que:

$$1 \cdot k = k$$

Indicaremos por D (n) todos os **divisores inteiros** do número inteiro n.

Observemos algumas outras notações:

- $D^*_+(n)$: divisores inteiros positivos (ou naturais) do número inteiro n.
- $D^*_-(n)$: divisores inteiros negativos do número inteiro n.

Observação: Sendo n não-nulo
$D^*_+(n) = D_+(n)$ e $D^*_-(n) = D_-(n)$

1.4. Múltiplos de um Número Inteiro

Sejam m e n dois números inteiros. Dizemos que n é **múltiplo** de m, se existir um número k, inteiro, tal que:

$$n = k \cdot m$$

Dizemos que 12 é múltiplo de 3, pois existe um número inteiro k (neste caso $k = 4$ tal que:

$$3 \cdot k = 12$$

Dizemos que – 21 é múltiplo de 7, pois existe um número inteiro k (neste caso $k = -3$), tal que:

$$-21 = 7 \cdot k$$

Observemos que o 0 (zero) é múltiplo do número inteiro k, qualquer que seja k, pois sempre podemos escrever:

$$0 \cdot k = 0$$

Indicaremos por M(m), todos os múltiplos inteiros do número inteiro m.

Observemos algumas outras notações:

- $M_+ (m)$: múltiplos inteiros não-negativos (ou naturais) do número inteiro m.
- $M_- (m)$: múltiplos inteiros não-positivos do número inteiro m.
- $M^*_- (m)$: múltiplos inteiros positivos do número inteiro m.
- $M^*_- (m)$: múltiplos inteiros negativos do número inteiro m.

1.5. Paridade de Números Inteiros

Dizemos que um número inteiro a é **par** se, e somente se, $a \in$ M(2). Sendo, então, a um múltiplo de 2, temos que a forma geral de apresentarmos um número par é:

$$a = 2k, \text{ em que } k \in \mathbf{Z}$$

Dizemos que um número inteiro b é **ímpar** se, e somente se, $b \notin$ M(2). A forma geral de apresentarmos um número ímpar é:

$$b = 2k + 1, \text{ em que } k \in Z$$

1.6. Números Primos e Compostos

Um número inteiro é dito **número primo,** quando na sua relação de divisores inteiros tivermos **apenas quatro divisores.**

$$p \text{ é primo} \Leftrightarrow n\,[D(p)] = 4$$

Um número inteiro é dito **número composto** quando na sua relação de divisores inteiros tivermos **mais que quatro divisores**.

$$a \text{ é composto} \Leftrightarrow n\,[D\,(a)] > 4$$

Para reconhecermos se um número é primo, devemos dividir este número, sucessivamente, pelos números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... até obtermos um quociente x menor ou igual ao divisor. Se até então não tivermos obtido divisão exata, dizemos que o número é primo.

Exemplos

a) Reconhecer se o número 673 é primo.

673	2		673	3
1	336		1	224
673	5		673	7
3	134		1	96
673	11		673	13
2	61		10	51
673	17		673	19
10	39		8	35
673	23		673	29
6	29		6	23

Na última divisão, o quociente já é menor que o divisor e ainda não obtivemos divisão exata, portanto o 673 é um número primo.

b) Reconhecer se o número 391 é primo.

$$\begin{array}{r|l} 391 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 195 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 391 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 130 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 391 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 78 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 391 & 7 \\ \cline{2-2} 6 & 55 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 391 & 11 \\ \cline{2-2} 6 & 35 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 391 & 13 \\ \cline{2-2} 1 & 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 391 & 17 \\ \cline{2-2} 0 & 23 \end{array}$$

Na última operação, obtivemos uma divisão exata, portanto 391 *não* é um número primo.

> **Observações Importantes**
>
> 1) Os números –1, 0 e 1 não são classificados nem como primo nem como número composto.
>
> 2) Todo número composto pode ser fatorado ou decomposto num produto de fatores primos.

1.7. Divisibilidade Aritmética

Podemos verificar quando um número é divisível por outro, efetuando a operação de divisão. Existem, porém, critérios que nos permitem reconhecer a divisibilidade entre dois números sem que façamos a divisão. Tais critérios se aplicam aos principais e mais usados divisores, como observaremos a seguir:

- **divisibilidade por 2:** um número é divisível por 2 quando for par.
- **divisibilidade por 3:** um número é divisível por 3, quando a soma dos algarismos que o formam for múltiplo de 3.

Exemplos

a) 8 421 é divisível por 3, pois 8 + 4 + 2 + 1 = 15 é um múltiplo de 3.

- **divisibilidade por 4:** um número é divisível por 4, quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos da direita for divisível por 4.

b) 2 724 é divísivel por 4, pois o número 24 é divisível por 4.

- **divisibilidade por 5:** um número é divisível por 5, quando o seu algarismo da unidade for zero ou cinco.
- **divisibilidade por 6:** um número é divisível por 6, quando for divisível, separadamente, por 2 e por 3.
- **divisibilidade por 8:** um número é divisível por 8, quando o número formado pelos três últimos algarismos da direita for divisível por 8.

c) 22 **712** é divisível por 8, pois o número 712 é divisível por 8.

- **divisibilidade por 9:** um número é divisível por 9, quando a soma dos algarismos que o formam for múltiplo de 9.

d) 18 711 é divisível por 9, pois 1 + 8 + 7 + 1 = 18 é múltiplo de 9.

- **divisibilidade por 10:** um número é divisível por 10, quando o seu algarismo da unidade for zero.
- **divisibilidade por 11:** um número é divisível por 11, quando a diferença entre as somas dos valores absolutos dos algarismos de posição ímpar e a dos algarismos de posição par for divisível por 11.

e) 83 765 é divisível por 11, pois a diferença da soma dos algarismos de posição ímpar (5 + 7 + 8 = 20) e a soma dos algarismos de posição par (3 + 6 = 9) é um número divisível por 11.

- **divisibilidade por 12:** um número é divisível por 12, quando for divisível, separadamente, por 3 e por 4.

1.8. Fatoração Numérica

Todo o número composto pode ser decomposto ou fatorado num produto de números primos. Assim, por exemplo, o número 90, que não é primo, pode ser decomposto como:

$$90 = 2 \cdot 45$$

O número 45, por sua vez, sendo composto, pode ser fatorado na forma:

$$45 = 3 \cdot 15$$

Desta forma poderíamos apresentar o número 90 com uma fatoração:

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 15$$

Sendo o número 15 também um número composto, podemos apresentá-lo através do seguinte produto:

$$15 = 3 \cdot 5$$

Teremos, finalmente, a fatoração completa do número 90:

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Como procedimento geral, podemos estabelecer uma regra para decomposição de um número natural em fatores primos.

Regra

Para decompormos um número natural em fatores primos, basta dividirmos o número dado pelo seu menor divisor primo; dividimos o quociente obtido pelo seu menor divisor primo; procedemos da mesma maneira com os demais quocientes obtidos até chegarmos a um quociente igual a 1. O produto indicado de todos os fatores primos obtidos representa o número fatorado.

Exemplos

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ $\quad 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ $\quad 72 = 2^3 \cdot 3^2$

1.9. Número de Divisores de um Número Natural

Consideramos o número 12 na sua forma fatorada e o que se propõe a seguir:

$$12 = 2^2 \cdot 3^1$$

Divisores de 12:

$$2^0 \cdot 3^0 = 1$$
$$2^0 \cdot 3^1 = 3$$
$$2^1 \cdot 3^0 = 2$$
$$2^1 \cdot 3^1 = 6$$
$$2^2 \cdot 3^0 = 4$$
$$2^2 \cdot 3^1 = 12$$
$$D(12) = \{1,2,3,4,6,12\}$$

Observemos que os números obtidos são divisores naturais do número natural 12 e foram obtidos a partir da utilização dos seus fatores primos 2 e 3. O fator primo 2, que aparece na decomposição com o expoente 2, nos divisores pode aparecer com o expoente 0, 1 ou 2, representando três opções. Pelo mesmo raciocínio verificamos que o fator primo 3, que aparece na decomposição com o expoente 1, pode se apresentar, nos divisores, com expoente 0 ou 1, representando duas opções. Notamos que com três opções para o expoente do fator 2 e duas opções do fator 3 e,pelo princípio multiplicativo da regra de contagem dos agrupamentos, temos:

$$12 = 2^2 \cdot 3^1$$

opções para expoente do 2	opções para expoente do 3
↓	↓
3 ·	2 = 6

resultando 6 divisores naturais do números natural 12.

Devemos observar, também, que o número de opções para cada fator primo é o valor do seu expoente mais 1.

A partir desse desenvolvimento podemos estabelecer uma regra para determinação do número de divisores naturais de um número natural.

Regra

O número de divisores naturais de um número natural é igual ao produto dos expoentes dos seus fatores primos aumentado, cada expoente, do número 1.

Assim, se $a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma}$, com a, b e c primos, temos:

$$n\,[D_+\ (N)] = (\alpha + 1)\ (\beta + 1)\ (\gamma + 1)$$

Como observação podemos estabelecer que o número de divisores inteiros de um número natural é o dobro do número de divisores naturais, pois para cada divisor natural existem dois divisores inteiros: um com sinal positivo e o outro com sinal negativo.

Assim:

$$\boxed{n[D(N)] = 2 \cdot n[D_+ (N)]}$$

Exemplo

Consideremos: $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

Temos que o número de divisores naturais de 60 é:

$$n[D_+ (60)] = (2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$$

Temos que, a partir deste resultado, o número de divisores inteiros de 60 é:

$$n[D\ (60)] = 2 \cdot n\ [D_+ (60)] = 2 \cdot 12 = 24$$

1.10. Soma dos Divisores de um Número Natural

Vamos, outra vez, considerar o número 12 na sua forma fatorada, ou seja, $12 = 2^2 \cdot 3^1$. Observemos, também, os seus divisores naturais na forma que se apresentam:

$2^0 \cdot 3^0 = 1$	$2^1 \cdot 3^0 = 2$	$2^2 \cdot 3^0 = 4$
$2^0 \cdot 3^1 = 3$	$2^1 \cdot 3^1 = 6$	$2^2 \cdot 3^1 = 12$

Vamos desenvolver o produto:

$$(2^0 + 2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1) = 2^0 \cdot 3^0 + 2^0 \cdot 3^1 + 2^1 \cdot 3^0 + 2^1 \cdot 3^1 + 2^2 \cdot 3^0 + 2^2 \cdot 3^1$$

Não fica difícil observarmos que esta soma representa a soma dos divisores naturais do número 12 e que podemos estabelecer uma regra para determinação da soma dos divisores naturais de um número natural sem que haja a necessidade de conhecermos estes divisores.

Regra

A soma dos divisores naturais de um número é igual ao produto entre as somas das potências geradas pelos seus fatores primos com os expoentes naturais que variam de zero até o expoente com o qual o fator se apresenta na decomposição do número natural.

Assim, se N = $a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma}$, com a, b e c primos, temos:

$$\text{soma}\ [D_+ (N)] =$$

$$(a^0 + a^1 + \ldots + a^{\alpha})(b^0 + b^1 + \ldots + b^{\beta})(c^0 + c^1 + \ldots + c^{\gamma})$$

Como observação podemos estabelecer que a soma dos divisores inteiros de um número natural é sempre zero, pois para cada divisor inteiro positivo corresponde um outro divisor inteiro de mesmo valor, porém negativo, e na soma, eles se anulam.

$$\boxed{\text{soma}\ [D\ (N) = 0]}$$

Exemplo

Consideremos: $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot$

A soma dos divisores naturais de 60 é:

$$\text{soma } [D_+ (60)] =$$

$$= (2^0 + 2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1)(5^0 + 5^1) = 168.$$

A soma dos divisores inteiros de 60 é:

$$\text{soma } [D (60)] = 0$$

1.11. Determinação dos Divisores de um Número Natural

Para determinação dos **divisores naturais de um número natural**, devemos tomar o número decomposto e utilizar cada um dos seus fatores primos com o expoente que pode variar de zero até o expoente natural com o qual o fator se apresenta na decomposição. Percorrendo todas as situações, teremos todos os divisores naturais do número considerado. Para executarmos esta tarefa com maior facilidade, podemos estabelecer uma regra.

> **Regra**
> Para estabelecermos os divisores de um número natural, inicialmente devemos decompor o número em fatores primos e à direita desta fatoração passamos um traço vertical. A seguir, colocamos ao lado direito do traço e acima do primeiro fator, o número 1. Os demais divisores do número dado são obtidos a partir da unidade, multiplicando-se cada um dos fatores primos que estão à esquerda do traço pelos números que estão à direita e situados acima dele, evitando-se as repetições.

Exemplo

Determinar os divisores naturais do número natural 60.

		1	
60	2	2	$D_+ (60)$
30	2	4	
15	3	3, 6, 12	
5	5	5, 10, 20, 15, 30, 60	
1			

$D_+ (60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$

2. Propriedades

Os múltiplos e os divisores dos números naturais apresentam algumas propriedades que nos são muito úteis e que passaremos a estudar a seguir.

- **Propriedade 1**

> Se um número natural P dividido por um número natural d deixa resto r, então $(P - r)$ é múltiplo de d.

Justificativa

$$\begin{array}{l|l} P & d \\ \hline r & q \end{array} \quad \Rightarrow P = d \cdot q + r \quad \Rightarrow \quad P - r = d \cdot q$$

portanto $(P - r)$ é múltiplo de d.

Exemplo

$$\begin{array}{l|l} 45 & 6 \\ \hline 3 & 7 \end{array}$$

$\Rightarrow 45 - 3 = 42$ que é, de fato, um múltiplo do divisor 6.

- **Propriedade 2**

> Se um número natural P dividido por um número natural d deixa resto r, então $P + (d - r)$ é um múltiplo de d.

Justificativa

$$\begin{array}{l|l} P & d \\ \hline r & q \end{array} \quad \Rightarrow P = d \cdot q + r \text{ (igualdade I)}$$

Adicionando-se $(d - r)$ aos dois membros da igualdade I, teremos:

$$P + (d - r) = d \cdot q + r + (d - r)$$

$$P + (d - r) = d \cdot q + d$$

Assim:

$$P + (d - r) = d \cdot (q + 1)$$

Portanto, $P + (d - r)$ é um múltiplo de d.

Exemplo

$$\begin{array}{r|l} 45 & 6 \\ \hline 3 & 7 \end{array} \Rightarrow 45 + (6 - 3) = 48,$$ que é, de fato, um múltiplo do divisor 6.

- **Propriedade 3**

> Se um número A é múltiplo de um número B, então o número A será múltiplo de todos os divisores de B.

Justificativa

Sendo A um múltiplo de B, temos que:

$$A = k \cdot B, \text{ onde } k \in Z \text{ (I).}$$

Sendo m um divisor qualquer de B, temos que:

$$B = k_1 \cdot m, \text{ em que } k_1 \in Z \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$A = k \cdot k_1 \cdot m, \text{ em que } k \cdot k_1 \in Z$$

Portanto, A é um múltiplo de m.

Exemplo

O número 36 é múltiplo do número 12, pois 36 = 3 · 12 e 3 é um número inteiro. Os divisores naturais de 12 são: 1,2,3,4,6 e 12.

Podemos observar que, de fato, 36 é múltiplo de todos os divisores de 12.

- **Propriedade 4**

> Para um conjunto com n números naturais não-nulos consecutivos, um deles é múltiplo de n.

Justificativa

Consideremos a seqüência dos números naturais não-nulos:

1,2,**3**,4,5,**6**,7,8,**9**,10,11,**12**,13,14,**15**,16,...

Observemos que os múltiplos do número 3 aparecem de três em três nesta seqüência e que, portanto, qualquer conjunto com três números consecutivos vai apresentar, necessariamente, um múltiplo de 3.

Podemos extrapolar a idéia para todos os números naturais, confirmando a propriedade.

Exercícios Resolvidos

01. (Fuvest-SP) O número de divisores positivos do número 40 é:

a) 8
b) 6
c) 4
d) 2
e) 20

Resolução

- *Decompor 40 em fatores primos*

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 40 = 2^3 \times 5^1$$

- *Adicionando 1 a cada expoente:*

$3 + 1$ $\qquad$ $1 + 1$

4 $\qquad$ 2

- *Efetuando a multiplicação*

$4 \cdot 2 = 8$

Resposta: *A*

40 tem 8 divisores.

02. Mostre que, se a divisão de um número natural n, com n positivo, por 5 dá resto 1, então $(n - 1)(n + 4)$ é múltiplo de 25.

Resolução

Sabemos que: $\begin{array}{r|l} n & 5 \\ \hline 1 & a \end{array} \Rightarrow n = a \cdot 5 + 1$

Pelas Propriedades dos Divisores:

- *$n - 1$ é múltiplo de 5* $\qquad n - 1 = 5\,K_1 \quad (1)$
- *$n + (5 - 1)$ é múltiplo de 5* $\qquad n + 4 = 5\,K_2 \quad (2)$

*Multiplicando **1** por **2**:*

$(n - 1)(n + 4) = 5\,K_1 \cdot 5\,K_2$

$(n - 1)\,(n + 4) = 25\,K_1 \cdot K_2$

$K_1 \cdot K_2 = K$

Logo,

$(n - 1)(n + 4) = 25\,K$

Assim, $(n - 1)(n + 4)$ é múltiplo de 25.

3. Máximo Divisor Comum

O máximo divisor comum (MDC) de dois ou mais números é o maior número que é divisor comum de todos os números dados.

Podemos estabelecer uma seqüência de etapas até determinarmos o valor do máximo divisor comum de dois ou mais números como veremos a seguir, num exemplo.

Consideremos:

1. O número 18 e os seus divisores naturais:

$$D_+ (18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}.$$

2. O número 24 e os seus divisores naturais:

$$D_+ (24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

Podemos descrever, agora, os divisores comuns a 18 e 24:

$$D_+ (18) \cap D_+ (24) = \{1, 2, 3, 6\}$$

Observando os divisores comuns, podemos identificar o maior divisor comum dos números 18 e 24, ou seja:

$$\text{MDC } (18, 24) = 6.$$

4. Mínimo Múltiplo Comum

O mínimo múltiplo comum (MMC) de dois ou mais números é o menor número positivo que é múltiplo comum de todos os números dados.

Podemos estabelecer uma seqüência de etapas até determinarmos o valor do mínimo múltiplo comum de dois ou mais números, como veremos a seguir, num exemplo.

Consideremos:

1. O número 6 e os seus múltiplos positivos:

$$M_+^* (6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, ...\}$$

2. O número 8 e os seus múltiplos positivos:

$$M_+^* (8) = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64,...\}$$

Podemos descrever, agora, os múltiplos positivos comuns:

$$M_+^* (6) \cap M_+^* (8) = \{24, 48, 72, ...\}$$

Observando os múltiplos comuns, podemos identificar o mínimo múltiplo comum dos números 6 e 8, ou seja:

$$\text{MMC } (6, 8) = 24.$$

5. MDC e MMC pelo Método da Decomposição Isolada

Para determinarmos o MDC e o MMC de vários números, devemos colocar todos os números na forma fatorada. Após este procedimento, podemos estabelecer que:

1) O máximo divisor comum (MDC) dos números é o produto de todos os fatores comuns às fatorações com os menores expoentes com os quais eles se apresentam nas suas respectivas decomposições.

2) O mínimo múltiplo comum (MMC) dos números é o produto de todos os fatores existentes nas decomposições, comuns ou não, considerados com os maiores expoentes com os quais eles se apresentam nas suas respectivas decomposições.

Exemplo:

Consideremos os números *A*, *B* e *C*, já fatorados:

$A = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

$B = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$

$C = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3$

Teremos que:

$\text{MDC } (A, B, C) = 2^2 \cdot 5$ e

$\text{MMC } (A, B, C) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7.$

6. MMC e MDC pelo Método da Fatoração Simultânea

Podemos determinar o MDC e o MMC de dois ou mais números pelo uso de um procedimento que prevê a fatoração **simultânea** de todos os números dados.

Para este procedimento, inicialmente, decompomos, simultaneamente, os números, dividindo sucessivamente pelo menor fator primo e, no caso de algum número ou quociente não ser divisível pelo fator primo, o número deve ser repetido no algoritmo. Obtemos o MMC multiplicando **todos os fatores primos** da decomposição.

Podemos, à medida que efetuamos fatoração simultânea, ir assinalando quais são os fatores primos que dividem, ao mesmo tempo, todos os números ou quocientes. Obtemos o MDC multiplicando todos estes **fatores assinalados**.

Exemplo

Consideremos os números 2 520 e 2 700:

2 520 ,	2 700	2	*
1 260 ,	1 350	2	*
630 ,	675	2	
315 ,	675	3	*
105 ,	225	3	*
35 ,	75	3	
35 ,	25	5	*
7 ,	5	5	
7 ,	1	7	
1 ,	1		

Teremos que:

MDC (2 700, 2 520) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ e

MMC (2 700, 2 520) = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

7. MDC pelo Método das Divisões Sucessivas

A determinação do MDC pelo método das divisões sucessivas é um processo desenvolvido por Euclides e consiste, basicamente, em dividir o número maior pelo número menor. Se a divisão for exata, o MDC será o menor número. Porém, caso a divisão apresentar resto diferente de zero, devemos dividir o menor número pelo resto e, assim, sucessivamente até chegarmos a uma divisão exata. O último divisor será o MDC dos números.

Exemplos

a) Determinar o MDC dos números 252 e 140.

	1	1	4	quocientes
252	140	112	28	
112	28	0		restos

MDC (252, 140) = 28

b) Determinar o MDC dos números 330, 210 e 165.

Tomemos, inicialmente, os dois maiores números:

	1	1	1	3
330	210	120	90	30
120	90	30	0	

MDC (330, 210) = 30

Posteriormente, tomamos o terceiro número com o MDC dos dois primeiros:

	5	2
165	30	15
15	0	

MDC (330, 210, 165) = 15

8. Propriedades do MDC e do MMC

Vamos observar, a seguir, uma propriedade do MDC e MMC que pode facilitar a sua utilização:

Propriedade 1

$$\boxed{MDC\,(A, B) \cdot MMC\,(A, B) = A \cdot B}$$

Justificativa

Consideremos os números A e B decompostos em fatores primos:

$$A = a^{\alpha_1} \cdot b^{\beta_1} \cdot c^{\gamma_1} \cdot \ldots p^{\delta_1} \quad e$$

$$B = a^{\alpha_2} \cdot b^{\beta_2} \cdot c^{\gamma_2} \cdot \ldots p^{\delta_2}$$

Para o cálculo do MDC (A, B), tomamos os fatores comuns com os menores expoentes; para o cálculo do MMC (*A*, *B*), tomamos todos os fatores, comuns e não comuns, com os maiores expoentes. Vamos considerar o caso do fator **a**:

$\alpha_1 < \alpha_2$, teremos α_1 no MDC e α_2 no MMC.

$\alpha_1 > \alpha_2$, teremos α_1 no MMC e α_2 no MDC.

No produto $A \cdot B$, o fator **a** terá expoente $(\alpha_1 + \alpha_2)$. No produto MDC (A, B) · MMC (A, B), o fator **a** também terá expoente $(\alpha_1 + \alpha_2)$.

Fazendo a mesma consideração para todos os outros fatores primos, verificaremos que os mesmos fatores, com os mesmos expoentes, que compõem o produto dos números A e B, compõem, também, o produto do MDC e o MMC destes números e, portanto:

$$\boxed{MDC\,(A, B) \cdot MMC\,(A, B) = A \cdot B}$$

Propriedade 2

$$\boxed{MDC\,(k \cdot A, k \cdot B) = k \cdot MDC\,(A, B)}$$

Propriedade 3

$$\boxed{MMC\,(k \cdot A, k \cdot B) = k \cdot MMC\,(A, B)}$$

Propriedade 4

Os divisores comuns de dois ou mais números naturais são os divisores do MDC destes números.

Propriedade 5

Os múltiplos comuns de dois ou mais números naturais são os múltiplos do MMC destes números.

Propriedade 6

Dois números são considerados **primos entre si** se o MDC deles for igual a 1.

Os números 5 e 7 são primos entre si, bem como 4 e 9, pois MDC (5, 7) = 1 e MDC (4, 9) =1. Notemos que, para que os números sejam primos entre si, não é necessário que eles sejam primos.

Propriedade 7

Dois números naturais consecutivos são, sempre, primos entre si.

Propriedade 8

Para os dois números primos entre si, o MMC é o produto deles.

Exercícios Resolvidos

01. Duas composições de metrô partem simultaneamente de um mesmo terminal fazendo itinerários diferentes. Uma torna a partir do terminal a cada 80 minutos; a outra a cada hora e meia. Determine o tempo percorrido entre duas partidas simultâneas consecutivas do terminal.

Resolução

Sejam A e B as composições.

A parte em instantes que são múltiplos de 80:

B parte em instantes que são múltiplos de 90.

Vamos obter MMC (80, 90)

$$\begin{array}{r|l} 80\,,\,90 & 2 \\ 40\,,\,45 & 2 \\ 20\,,\,45 & 2 \\ 10\,,\,45 & 2 \\ 5\,,\,45 & 3 \\ 5\,,\,15 & 3 \\ 5\,,\ \ 5 & 5 \\ 1\,,\ \ 1 & \end{array}$$

MMC (80,90) = 720 min

Passando para horas $\dfrac{720}{60} = 12$ horas

Resposta:

As partidas simultâneas ocorrerão a cada 12 horas.

02. Sejam A e B o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de 360 e 300, respectivamente. Então o produto AB vale

a) $2^4\ 3^4\ 5^3$
b) $2^5\ 3^2\ 5^2$
c) $2^5\ 3^3\ 5^3$
d) $2^6\ 3^3\ 5^2$
e) $2^6\ 3^4\ 5^2$

Resolução:

360	2	300	2
180	2	150	2
90	2	75	3
45	3	25	5
15	3	5	5
5	5	1	
1			

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

$A = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$B = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$A \cdot B = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^3$

Resposta: *C*

Capítulo 07. Teoria dos Conjuntos

1. Introdução

Como em qualquer assunto a ser estudado, a Matemática também exige uma linguagem adequada para o seu desenvolvimento.

A **teoria dos Conjuntos** representa instrumento de grande utilidade nos diversos desenvolvimentos da Matemática, bem como em outros ramos das ciências físicas e humanas.

Devemos aceitar, inicialmente, a existência de alguns conceitos primitivos (noções que adotamos sem definição) e que estabelecem a linguagem do estudo da **teoria dos Conjuntos**.

Adotaremos a existência de três conceitos primitivos: **elemento**, **conjunto** e **pertinência**. Assim é preciso entender que, cada um de nós é um **elemento** do **conjunto** de moradores desta cidade, ou melhor, cada um de nós é um **elemento** que **pertence** ao **conjunto** de habitantes da cidade, mesmo que não tenhamos definido o que é conjunto, o que é elemento e o que é pertinência.

2 . Notação e Representação

A notação dos conjuntos é feita mediante a utilização de uma letra maiúscula do nosso alfabeto e a representação de um conjunto pode ser feita de diversas maneiras, como veremos a seguir.

2.1. Listagem dos Elementos

Apresentamos um conjunto por meio da listagem de seus elementos quando relacionamos todos os elementos que pertencem ao conjunto considerado e envolvemos essa lista por um par de chaves. Os elementos de um conjunto, quando apresentados na forma de listagem, devem ser separados por vírgula ou por ponto-e-vírgula, caso tenhamos a presença de números decimais.

Exemplos

a) Seja A o conjunto das cores da bandeira brasileira, então:
   A = {verde, amarelo, azul, branco}

b) Seja B o conjunto das vogais do nosso alfabeto, então:
   B = {a, e, i, o, u}

c) Seja C o conjunto dos algarismos do sistema decimal de numeração, então:
   C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

2.2. Uma Propriedade de seus Elementos

A apresentação de um conjunto por meio da listagem de seus elementos traz o inconveniente de não ser uma notação prática para os casos em que o conjunto apresenta uma infinidade de elementos. Para estas situações, podemos fazer a apresentação do conjunto por meio de uma propriedade que sirva a todos os elementos do conjunto e somente a estes elementos.

A = {x / x possui uma determinada propriedade P}

Exemplos

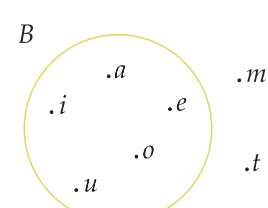
a) Seja B o conjunto das vogais do nosso alfabeto, então:
   B = {x / x é vogal do nosso alfabeto}

b) Seja C o conjunto dos algarismos do sistema decimal de numeração, então:
   C = {x/x é algarismo do sistema decimal de numeração}

2.3. Diagrama de Euler-Venn

A apresentação de um conjunto por meio do diagrama de Euler-Venn é gráfica e, portanto, muito prática. Os elementos são representados por pontos interiores a uma linha fechada não entrelaçada. Dessa forma, os pontos exteriores à linha representam elementos que não pertencem ao conjunto considerado.

Exemplo



3. Relação de Pertinência

Quando queremos indicar que um determinado elemento x faz parte de um conjunto A, dizemos que o elemento x **pertence** ao conjunto A e indicamos:

$$\boxed{x \in A}$$

em que o símbolo $\in$ é uma versão da letra grega epsílon e está consagrado em toda matemática como símbolo indicativo de pertinência. Para indicarmos que um elemento x **não pertence** ao conjunto A, indicamos:

$$\boxed{x \notin A}$$

Exemplo

Consideremos o conjunto: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

O algarismo 2 **pertence** ao conjunto A:

$$\boxed{2 \in A}$$

O algarismo 7 **não pertence** ao conjunto A:

$$\boxed{7 \notin A}$$

4. Relação de Inclusão

Dizemos que o conjunto A está contido no conjunto B se **todo** elemento que pertencer a A, pertencer também a B. Indicamos que o conjunto A está contido em B por meio da seguinte símbologia:

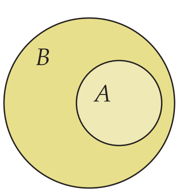
$\boxed{A \subset B}$ (lê-se: A contido em B)

Obs. – Podemos encontrar em algumas publicações uma outra notação para a relação de inclusão:

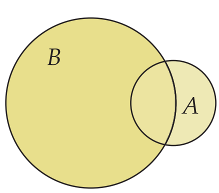
$\boxed{B \supset A}$ (lê-se: B contém A)

O conjunto A não está contido em B quando existe pelo menos um elemento de A que não pertence a B. Indicamos que o conjunto A não está contido em B desta maneira:

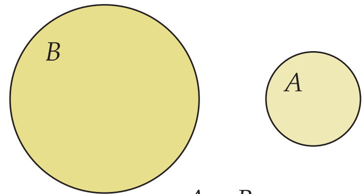
$\boxed{A \not\subset B}$ (lê-se: A não está contido em B)



$A \subset B$



$A \not\subset B$



$A \not\subset B$

Se o conjunto A está contido no conjunto B, dizemos que A é um **subconjunto** de B. Como todo elemento do conjunto A pertence ao conjunto A, dizemos que A é subconjunto de A e, por extensão, todo conjunto é subconjunto dele mesmo.

Importante – A relação de pertinência relaciona um elemento a um conjunto e a relação de inclusão refere-se, sempre, a dois conjuntos.

Errado: $2 \subset \{0, 2, 4, 6, 8\}$

$\{2\} \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$

Correto: $2 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$

$\{2\} \subset \{0, 2, 4, 6, 8\}$

$\{2\} \in \{0, \{2\}, 4, 6, 8\}$

$\{2\} \not\subset \{0, \{2\}, 4, 6, 8\}$

Podemos notar que existe uma diferença entre 2 e $\{2\}$. O primeiro é o elemento 2, e o segundo é o conjunto formado pelo elemento 2. Um par de sapatos e uma caixa com um par de sapatos são coisas diferentes e como tal devem ser tratadas.

Podemos notar, também, que, dentro de um conjunto, um outro conjunto pode ser tratado como um de seus elementos. Vejamos o exemplo a seguir:

$\{1, 2\}$ é um conjunto, porém no conjunto $A = \{1, 3, \{1, 2\}, 4\}$ ele será considerado um elemento, ou seja, $\{1, 2\} \in A$.

Uma cidade é um conjunto de pessoas que representam os moradores da cidade, porém uma cidade é um elemento do conjunto de cidades que formam um Estado.

5. Conjuntos Especiais

Embora conjunto nos ofereça a idéia de "reunião" de elementos, podemos considerar como conjunto agrupamentos formados por um só elemento ou agrupamentos sem elemento algum.

Chamamos de **conjunto unitário** aquele formado por um só elemento.

Exemplos

a) Conjunto dos números primos, pares e positivos:

$$\{2\}$$

b) Conjunto dos satélites naturais da Terra:

$$\{\text{Lua}\}$$

c) Conjunto das raízes da equação $x + 5 = 11$:

$$\{6\}$$

Chamamos de **conjunto vazio** aquele formado por nenhum elemento. Obtemos um conjunto vazio considerando um conjunto formado por elementos que admitem uma propriedade impossível.

Exemplos

a) Conjunto das raízes reais da equação:

$$x^2 + 1 = 0$$

b) Conjunto: $\{x \,/\, x \neq x\}$

O conjunto vazio pode ser apresentado de duas formas: $\varnothing$ ou $\{\ \}$ ($\varnothing$ é uma letra de origem norueguesa). Não podemos confundir as duas notações representando o conjunto vazio por $\{\varnothing\}$, pois estaríamos apresentando um conjunto unitário cujo elemento é o $\varnothing$.

O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto e, por isso, é considerado subconjunto de qualquer conjunto, inclusive dele mesmo.

Demonstração

Vamos admitir que o conjunto vazio não esteja contido num dado conjunto A. Neste caso, existe um elemento x que pertence ao conjunto vazio e que não pertence ao conjunto A, o que é um **absurdo**, pois o conjunto vazio não tem elemento algum. **Conclusão:** o conjunto vazio está contido no conjunto A, qualquer que seja A.

6. Conjunto Universo

Quando desenvolvemos um determinado assunto dentro da matemática, precisamos admitir um conjunto ao qual pertencem os elementos que desejamos utilizar. Este conjunto é chamado de **conjunto universo** e é representado pela letra maiúscula U.

Uma determinada equação pode ter diversos conjuntos solução de acordo com o conjunto universo que for estabelecido.

Exemplos

a) A equação $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$ apresenta:

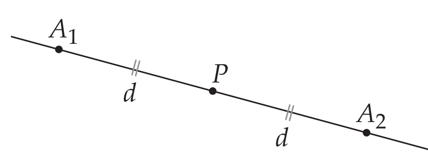
$$S = \left\{\frac{1}{2},\ -1,\ 3\right\} \text{ se } U = R$$

$$S = \{-1,\ 3\} \text{ se } U = Z$$

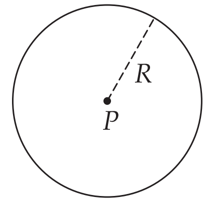
$$S = \{3\} \text{ se } U = N$$

b) O conjunto dos pontos **eqüidistantes** de um ponto dado pode ser formado:

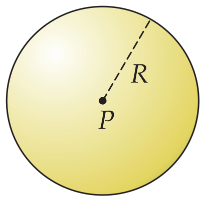
– por apenas dois pontos, se o conjunto universo for uma reta que passa pelo ponto dado;



– pelos infinitos pontos de uma circunferência, se o conjunto universo for um plano que passa pelo ponto dado;



– pelos infinitos pontos de uma superfície esférica, se o conjunto universo for o espaço a que o ponto dado pertence.



Para iniciarmos qualquer procedimento matemático, é importante sabermos em qual conjunto universo vamos atuar.

7. Conjunto de Partes

Dado um conjunto *A*, dizemos que o seu conjunto de partes, representado por *P (A)*, é o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto *A*.

7.1. Determinação do Conjunto de Partes

Vamos observar, com o exemplo a seguir, o procedimento que se deve adotar para a determinação do conjunto de partes de um dado conjunto *A*. Seja o conjunto $A = \{2, 3, 5\}$. Para obtermos o conjunto de partes do conjunto *A*, basta escrevermos todos os seus subconjuntos:

a) Subconjunto vazio: $\varnothing$, pois o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.
b) Subconjuntos com um elemento: {2}, {3}, {5}.
c) Subconjuntos com dois elementos: {2, 3}, {2, 5} e {3, 5}.
d) Subconjuntos com três elementos: $A = \{2, 3, 5\}$, pois todo conjunto é subconjunto dele mesmo.

Assim, o conjunto das partes do conjunto *A* pode ser apresentado da seguinte forma: $P(A) = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 3, 5\}\}$

7.2. Número de Elementos do Conjunto de Partes

Podemos determinar o número de elementos do conjunto de partes de um conjunto *A* dado, ou seja, o número de subconjuntos do referido conjunto, sem que haja necessidade de escrevermos todos os elementos do conjunto *P (A)*. Para isso, basta partirmos da idéia de que cada elemento do conjunto *A* tem duas opções na formação dos subconjuntos: ou o elemento pertence ao subconjunto ou ele não pertence ao subconjunto e, pelo uso do princípio multiplicativo das regras de contagem, se cada elemento apresenta duas opções, teremos:

$$\boxed{n\,[P(A)] = 2^{n(A)}}$$

Observemos o exemplo anterior: o conjunto $A = \{2, 3, 5\}$ apresenta três elementos e, portanto, é de se supor, pelo uso da relação apresentada, que $n\ [P\ (A)] = 2^3 = 8$, o que de fato ocorreu.

8. Igualdade de Conjuntos

Dois conjuntos são iguais se, e somente se, eles possuírem os mesmos elementos, em qualquer ordem e independentemente do número de vezes que cada elemento se apresenta. Vejamos os exemplos:

$\{1, 3, 7\} = \{1, 1, 1, 3, 7, 7, 7, 7\} = \{7, 3, 1\}$

Observação

Se o conjunto *A* está contido em *B* ($A \subset B$) e *B* está contido em *A* ($B \subset A$), podemos afirmar que $A = B$.

Exercícios Resolvidos

01. Dado o conjunto $M = \{1, 3, 5, 7\}$, pede-se:

a) Quantos elementos possui $P(M)$?
b) Escreva os elementos de $P(M)$.

Resolução

a) $M = \{1, 3, 5, 7\}$, *então* $n(M) = 4$, *portanto* $n[P(M)] = 2^4 = 16$.

b) $P(M) = \{ \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{1,7\}, \{3,5\}, \{3,7\}, \{5,7\}, \{1,3,5\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{1, 3, 5, 7\}, \varnothing\}$

02. Se o conjunto $P(R)$ tem 1 024 elementos, quantos são os elementos de *R*?

Resolução

Decompondo 1 024 em fatores primos, obteremos:

$1\,024 = 2^{10}$, *então* $n(\mathrm{R}) = 10$.

03. Considerando $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ como conjunto universo, determinar o conjunto solução de:

a) $\{x \in U | x + 4 = 2\}$

b) $\{x \in U | 3x = 5\}$

Resolução

a) $x + 4 = 2$

$x = -2$

$S = \{-2\}$

b) $3x = 5$

$x = \dfrac{5}{3} \notin U$

$S = \varnothing$

04. Os elementos dos conjuntos abaixo são números naturais. Escreva esses conjuntos por meio de uma propriedade que os caracterize:

a) D = {1, 3, 5, 7, 9, 11, ...}

b) A = {0, 3, 6, 9 ...60}

Resolução

a) $D = \{x \in N / x$ *é número ímpar*$\}$

b) $A = \{x \in N / x$ *é múltiplo de 3, maior ou igual a zero e menor ou igual a 60*$\}$

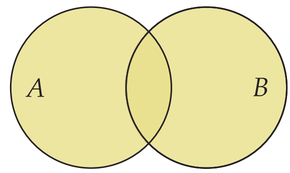
9. Operações com Conjuntos

9.1. União de Conjuntos

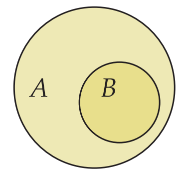
Dados os conjuntos A e B, dizemos que a união dos conjuntos A e B, de notação $A \cup B$ (lê-se: A união B), é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A **ou** B. Podemos representar a união de dois conjuntos pela seguinte sentença.

$$\boxed{A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}}$$

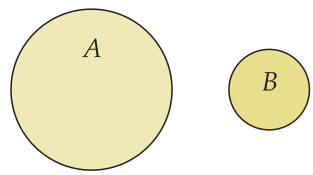
Graficamente, temos:



$A \cup B$



$A \cup B$



$A \cup B$

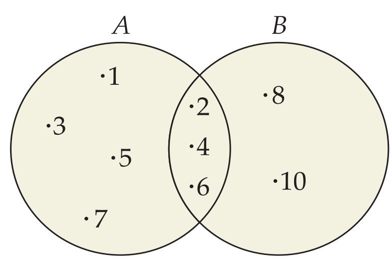
Exemplo

Dados os conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} e B = {2, 4, 6, 8, 10}, calcular $A \cup B$.

Resolução

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

Graficamente, teremos



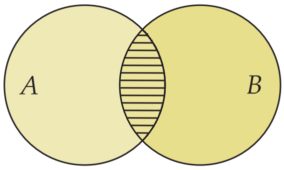
Observe que os elementos comuns não são repetidos.

9.2. Intersecção de Conjuntos

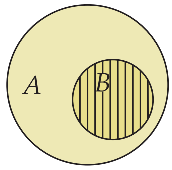
Dados os conjuntos A e B, dizemos que a intersecção dos conjuntos A e B, de notação $A \cap B$ (lê-se: A intersecção B), é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A **e** a B. Podemos representar a intersecção de dois conjuntos pela seguinte sentença:

$$\boxed{A \cap B = \{x / x \in A \text{ e } x \in B\}}$$

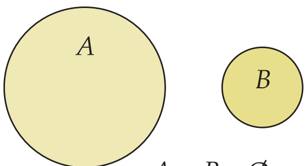
Graficamente, temos:



$A \cap B$



$A \cap B$



$A \cap B = \varnothing$

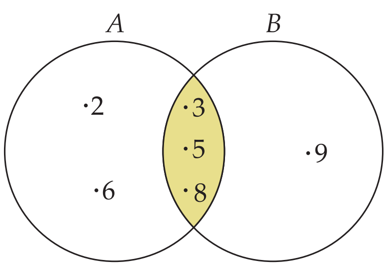
Exemplos

a) Sendo $A = \{2, 3, 5, 6, 8\}$ e $B = \{3, 5, 8, 9\}$ determinar $A \cap B$.

Resolução

$A \cap B = \{3, 5, 8\}$, apenas os elementos comuns a A e B.

Graficamente:



b) Calcule $M \cap N$ onde $M = \{2, 3, 5\}$ e $N = \{4, 6\}$.

$M \cap N = \varnothing$

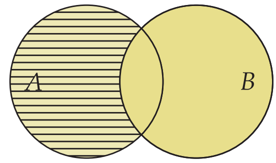
Não há elementos comuns, nesse caso dizemos que os conjuntos são **disjuntos**.

9.3. Diferença de Conjuntos

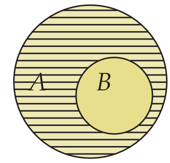
Dados os conjuntos A e B, dizemos que a diferença dos conjuntos A e B, nessa ordem e com notação $A - B$ (lê-se: A menos B), é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B. Podemos representar a diferença de dois conjuntos por meio da seguinte sentença:

$$\boxed{A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \notin B\}}$$

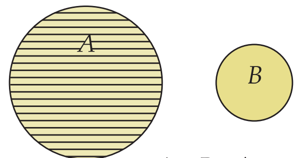
Graficamente, temos:



$A - B$



$A - B$



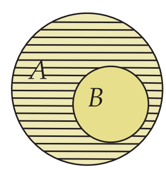
$A - B = A$

9.4. Conjunto Complementar

Quando dois conjuntos A e B são de tal maneira que B está contido em A ($B \subset A$), dizemos que a diferença $A - B$ é o **conjunto complementar de *B* em relação a *A***, cuja representação podemos ver a seguir:

$$\complement_A^B = A - B$$

Graficamente, temos:



$\complement_A^B$

Exemplos

a) Calcular A – B, sabendo que

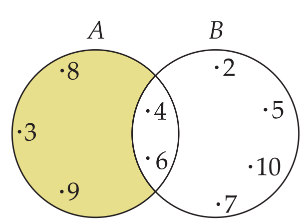
A = {3, 4, 6, 8, 9} e B = {2, 4, 5, 6, 7, 10}

Resolução

$A - B = \{3, 8, 9\}$

Elementos que estão em A mas não estão em B.

Graficamente:



b) Sendo A = {1, 3, 5} e B = {0, 1, 3, 5, 6}, calcule:

a) $A - B$

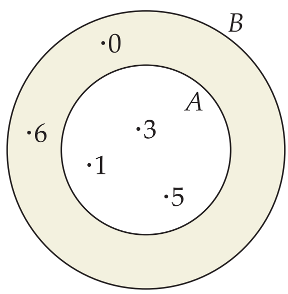
b) $B - A$

Resolução

a) $A - B = \varnothing$, *não existe elemento de A que não pertença a B.*

b) $A \subset B \Rightarrow B - A = \complement_B^A = \{0, 6\}$

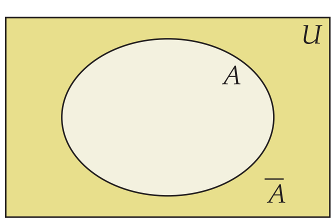
Graficamente



Observação

Se A é um subconjunto do conjunto universo U, o complementar de A em relação a U pode ser representado por A' ou $\overline{A}$, dessa forma, teremos

$$\overline{A} = A' = \complement_U^A = U - A$$



9.5. Associações das Operações

As operações estudadas podem aparecer associadas conforme veremos nos exemplos abaixo:

01. Dados $A = \{0, 1, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $C = \{4, 5\}$ e $D = \{5, 6, 7\}$, calcule:

a) $(A \cup C) \cap B$

b) $(B \cap C) \cup D$

c) $(B - A) \cap C$

d) $(\complement_B^C) \cup (A \cap B)$

Resolução

a)

$$\underbrace{(A \cup C)} \cap B = \underbrace{\{0, 1, 3, 4, 5\}} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 5\}$$

b)

$$\underbrace{(B \cap C)} \cup D = \underbrace{\{4, 5\}} \cup \{5, 6, 7\} = \{4, 5, 6, 7\}$$

c)

$$\underbrace{(B - A)} \cap C = \underbrace{\{2, 5\}} \cap \{4, 5\} = \{5\}$$

d)

$$\underbrace{(\complement_B^C)} \cup \underbrace{(A \cap B)} = \underbrace{\{2, 3\}} \cup \underbrace{\{3, 4\}} = \{2, 3, 4\}$$

Exercícios Resolvidos

01. Classificar em falsa (F) ou verdadeira (V) cada uma das seguintes afirmações:

a) $0 \in \}0Ƹ$

b) $\{◎\} \subset \{\varnothing, \{1\}, \{5\}, \{1,5\}\}$

c) $\{x\} \in \{x, \{x, y\}\}$

d) $\varnothing = \{\varnothing\}$

Resolução

a) V — 0 é o elemento do conjunto.

b) F – pois {5} é um elemento do conjunto.

c) F – pois {x} não está no conjunto.

d) F – O 1º é conjunto vazio, e o 2º um conjunto que tem o elemento $\varnothing$.

02. São dados os conjuntos

$A = \{A \in \mathbb{N} / A \text{ é primo}\}$ e

$B = \{x \in \mathbb{N} / x < 5\}$

É correto afirmar que:

a) $c \cap B$ tem dois elementos
b) $A \cup B$ tem dez elementos
c) $B \subset A \cap B$
d) $B \in A$
e) $c \subset B$

Resolução

$c = \{A \in \mathbb{N} / A \text{ é } primo\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} / x < 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$A \cap B = \{2,3\}$, *logo* $c \cap B$ *tem dois elementos.*

03. Dados os conjuntos:

$A = \{a, b, c\}$ $B = \{b, c, d\}$ e $C = \{a, c, d, e\}$

Calcule $(A - C) \cup (C - B) \cup (A \cap B \cap C)$

Resolução

$A - C = \{b\}$
$C - B = \{a, e\}$

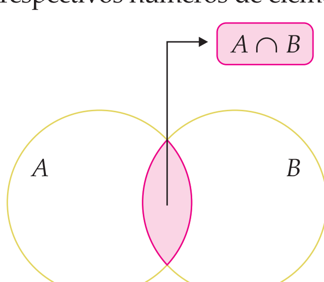
$A \cap B \cap C = \{c\}$

$\{b\} \cup \{a, e\} \cup \{c\} = \{a, b, c, e\}$

Resposta: {a, b, c, e}

10. Número de Elementos da União e da Intersecção de Conjuntos

Dados dois conjuntos *A* e *B*, como vemos na figura abaixo, podemos estabelecer uma relação entre os respectivos números de elementos.



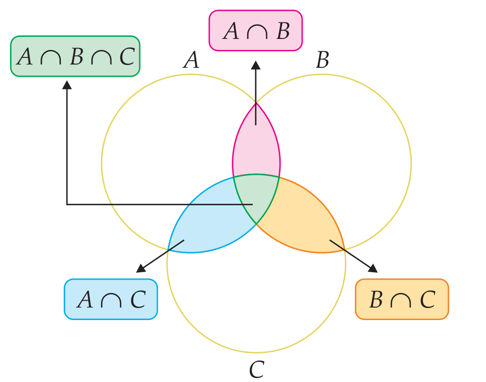
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Note que ao subtrairmos os elementos comuns $(n(A \cap B))$ evitamos que eles sejam contados duas vezes.

Observações

a) Se os conjuntos A e B forem disjuntos ou se mesmo um deles estiver contido no outro, ainda assim a relação dada será verdadeira.
b) Podemos ampliar a relação do número de elementos para três ou mais conjuntos com a mesma eficiência.

Observe o diagrama e comprove.



$n(\ \cup A \cup B) = C(\ ) + C(A) + C(B) - C(\ \cap A) -$
$- C(\ \cap B) - C(A \cap B) + C(\ \cap A \cap B)$

Exercícios Resolvidos

01. (Fatec - SP)

O conjunto A tem 20 elementos, A ? B tem 12 elementos e A ? B tem 60 elementos. O número de elementos do conjunto B é:

a) 28
b) 36
c) 40
d) 48
e) 52

Resolução

Temos:

$n(A) = 20$; $n(A \cap B) = 12$; $n(A \cup B) = 60$

$n(B) = x$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$60 = 20 + x - 12$

$x = 60 - 20 + 12$

$x = 52$

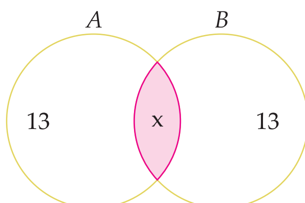
Resposta: *E*

02. A e B são dois conjuntos tais que 13 elementos pertencem a A e não pertencem a B; 13 elementos pertencem a B e não pertencem a A e 39 elementos pertencem a A ou B. O número de elementos que pertencem a A e B é:

a) 0
b) 13
c) 39
d) 26
e) 23

Resolução

Fazendo um esquema:



$n(A) = 13 + x$

$n(B) = 13 + x$

$n(A \cup B) = 39$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$39 = 13 + x + 13 + \cancel{x} - \cancel{x}$

$39 = 26 + x$

$x = 39 - 26$

$x = 13$

Resposta: *B*

03. (FVG-SP) Uma empresa entrevistou 300 de seus funcionários a respeito de três embalagens: A, B e C para o lançamento de um novo produto. O resultado foi o seguinte: 160 indicaram a embalagem A; 120 indicaram a embalagem B; 90 indicaram a embalagem C; 30 indicaram a embalagem A e B; 40 indicaram as embalagens A e C; 50 indicaram as embalagens B e C; e 10 indicaram as 3 embalagens.

Pergunta-se:

a) quantas pessoas indicaram apenas a embalagem A;

b) quantas pessoas indicaram as embalagens A ou B;

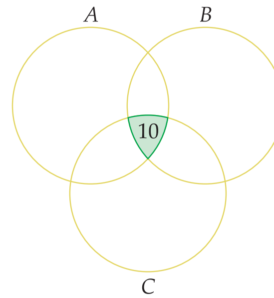
c) quantas não indicaram a embalagem C;

d) quantos não tinham preferência por nenhuma das três embalagens?

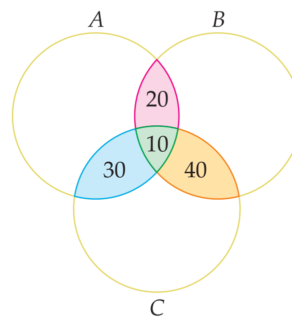
Resolução

Usaremos os diagramas para resolver.

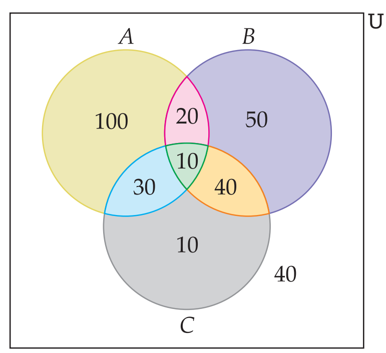
Vamos começar por A ? B ? C *que tem 10 elementos.*



Para $n(A \cap B) = 30$ e já colocamos 10, restam 20 elementos para completar a região A ? B*; para completar* A ? C *faltam 30 e para completar* B ? C *faltam 40.*



Da mesma forma completamos os conjuntos A, B e C; veja que 40 pessoas não tem preferência alguma.



Agora, consultando o diagrama final podemos responder às questões.

a) 100 pessoas indicaram apenas a embalagem A;

b) 100 + 30 + 10 + 20 + 50 + 40 = 250 indicaram as embalagens A ou B;

c) 100 + 20 + 50 + 40 = 210 não indicaram a embalagem C;

d) 40 pessoas não tinham preferência por nenhuma embalagem.

11. Conjuntos Numéricos

Evidentemente, para a Matemática, os conjuntos de maior importância são os conjuntos numéricos, aqueles formados por números. Destes, alguns são especiais pela sua grande utilização e, por isso, recebem nomes convencionais, como veremos a seguir:

- Conjunto dos números naturais: N

$$\boxed{N = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}}$$

- Conjunto dos números inteiros: Z

$$\boxed{Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}}$$

No conjunto dos números inteiros (Z) podemos individualizar dois subconjuntos:

- Conjunto dos números inteiros não negativos: Z_+

$$\boxed{Z_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\} = N}$$

- Conjunto dos números inteiros não positivos: Z_-

$$\boxed{Z_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}}$$

Vamos convencionar que qualquer conjunto numérico que, em sua representação, tiver acrescentado o símbolo * (asterisco) ficará sem o elemento 0 (zero). Assim:

$$\boxed{N^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}}$$

$$\boxed{Z^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}}$$

- Conjunto dos números racionais: Q

$$\boxed{Q = \left\{ x \,/\, x = \frac{p}{q} \text{ onde } p \in Z \text{ e } q \in Z^* \right\}}$$

Com relação aos números racionais, eles podem ser encontrados de três maneiras: número inteiro ou número decimal exato ou número decimal periódico (dízimas periódicas).

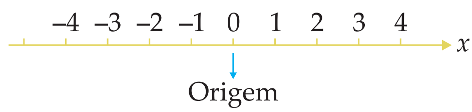
Os números que não podem ser colocados na forma de fração com numerador inteiro e denominador inteiro não-nulo são chamados de números irracionais.

Exemplos: $\sqrt{2}, \pi, \sqrt[5]{7}$

- Conjunto dos números reais: R

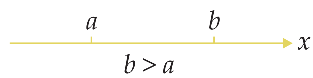
R = {x / x é racional ou x é irracional}

Os números reais podem ser associados biunivocamente com cada ponto de uma reta, estabelecendo o que nós chamaremos de **reta real** ou **eixo real**.

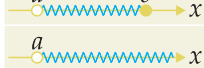


A partir dessa representação gráfica, iremos observar algumas propriedades importantes dos números reais.

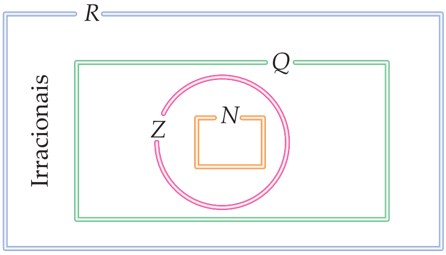
O eixo real apresenta uma ordenação dos números de tal maneira que qualquer número colocado à direita de um outro será maior que este outro.



Numa comparação entre números reais representados no eixo real, podemos estabelecer subconjuntos de extrema importância e que serão chamados de **intervalos reais**, cuja representação vamos estudar a seguir:

	$a < x < b$	$]a, b[$	(a, b)
	$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	$[a, b]$
	$a < x \leq b$	$]a, b]$	$(a, b]$
	$x > a$	$]a, +\infty[$	$(a, +\infty)$
	$x \leq b$	$]-\infty, b[$	$(-\infty, b]$

Podemos "explicar" o aparecimento dos conjuntos numéricos através da necessidade que a Matemática manifestava em apresentar resultados que os conjuntos numéricos existentes até então não forneciam. A partir dos conjuntos dos números **naturais**, operações como, por exemplo, a subtração 5 – 8 só puderam apresentar um resultado com o aparecimento do conjunto dos números **inteiros**. A divisão de número 8 por 3 só pode apresentar resultado dentro do conjunto dos números **racionais**. O cálculo da raiz quadrada do número 17, por exemplo, é um resultado possível somente dentro do conjunto dos números **irracionais.** Pela reunião do conjunto dos números racionais com os números irracionais obtivemos o conjunto dos números **reais**. Por mais amplo que possa parecer o conjunto dos números reais, não foi suficiente para cumprir todas as exigências quanto a esgotar as necessidades de resultados possíveis dentro da Matemática. Algumas operações matemáticas só puderam apresentar resultados dentro do **conjunto dos números complexos.**



12. Operações com Intervalos em R (reais)

Vejamos com exemplos:

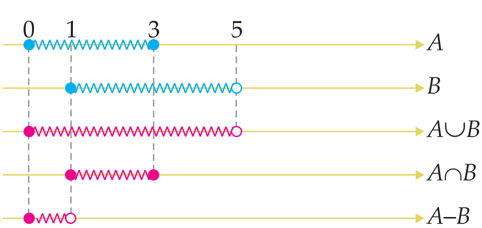
a) Dados A = [0, 3] e B = [1, 5[, calcule:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A - B$

Resolução



$$A \cup B = [0, 5[= \{x \in R / 0 \le x < 5\}$$

$$A \cap B = [1, 3] = \{x \in R / 1 \le x \le 3\}$$

$$A - B = [0, 1[= \{x \in R / 0 \le x < 1\}$$

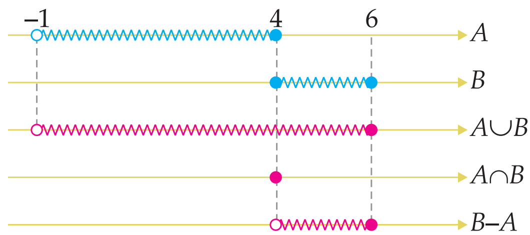
b) Dados A=]–1, 4] e B = [4, 6], determine:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $B - A$

Resolução



$$A \cup B =]-1, 6] = \{x \in R | -1 < x \le 6\}$$

$$A \cap B = \{4\}$$

$$B - A =]4, 6] = \{x \in R | 4 < x \le 6\}$$

Exercícios Resolvidos

01. (Fuvest - SP)

Dividir um número por 0,0125 equivale a multiplicá-lo por:

a) $\frac{1}{125}$

b) $\frac{1}{o}$

c) 8

d) 12,5

e) 80

Resolução

Note que $0{,}0125 = \frac{125}{10\,000}$ *que, simplificada por 125, dará* $\frac{1}{80}$. *Seja n o número, então:*

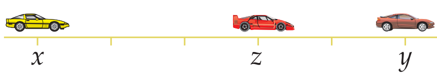
$$n : \frac{1}{80} = n \cdot \frac{80}{1} = 80 \cdot n$$

Resposta: E

02. (Ulbra-RS)

Uma estrada está marcada em 5 partes iguais conforme a figura abaixo. Se o carro x está na posição 170,3 e o y na posição 231,8, a localização do carro Z é:

a) 207,2.
b) 36,9.
c) 194,9.
d) 182,6.
e) impossível determinar.



Resolução

Entre x e y existem 5 intervalos iguais de comprimento n:

$170{,}3 + n = 231{,}8$

$n = 61{,}5$

Cada intervalo terá:

$61{,}5 : 5 = 12{,}3$ *unidades*

De z para y temos duas unidades:

$12{,}3 \cdot 2 = 24{,}6$ *unidades*

A posição de Z será dada por:

$231{,}8 - 24{,}6 = 207{,}2$ *unidades*

Resposta: *A*

Capítulo 08. Equações

1. Introdução

Consideremos as três igualdades abaixo:

1ª) 2 + 3 = 5

2ª) 2 + 1 = 5

3ª) 2 + x = 5

Dizemos que as duas primeiras igualdades são **sentenças matemáticas fechadas**, pois são definitivamente falsas ou definitivamente verdadeiras. No caso, a primeira é sempre verdadeira e a segunda é sempre falsa.

Dizemos que a terceira igualdade é uma **sentença matemática aberta**, pois pode ser verdadeira ou falsa, dependendo do valor atribuído à letra x. No caso, é verdadeira quando atribuímos a x o valor 3 e falsa quando o valor atribuído a x é diferente de 3. Sentenças matemáticas desse tipo são chamadas de **equações**; a letra x é a variável da equação, o número 3 é a raiz ou solução da equação e o conjunto S = {3} é o conjunto solução da equação, também chamado de conjunto verdade.

Exemplos

a) $2x + 1 = 7$

3 é a única raiz, então S = {3}

b) $3x - 5 = -2$

1 é a única raiz, então S = {1}

2. Resolução de uma Equação

Resolver uma equação é determinar todas as raízes da equação que pertencem a um conjunto previamente estabelecido, chamado conjunto universo.

Exemplos

a) Resolver a equação:

$$x^2 = 4 \text{ em } \mathbb{R}$$

As raízes reais da equação são –2 e +2, assim:

$$\boxed{S = \{-2, +2\}}$$

b) Resolver a equação:

$$x^2 = 4 \text{ em } \mathbb{N}$$

A única raiz natural da equação é 2, assim:

$$\boxed{S = \{2\}}$$

Na resolução das equações, podemos nos valer de algumas operações e transformá-las em equações equivalentes, isto é, que apresentam o mesmo conjunto solução, no mesmo universo.

Vejamos algumas destas propriedades:

P_1) Quando adicionamos ou subtraímos um mesmo número aos dois membros de uma igualdade, esta permanece verdadeira.

$$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$$

ou

$$a = b \Leftrightarrow a - c = b - c$$

Conseqüência

Observemos a equação:

$$x + 2 = 3$$

Subtraindo 2 nos dois membros da igualdade, temos:

$$x + 2 = 3 \Leftrightarrow x + 2 - 2 = 3 - 2$$

Assim:

$$x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

P_2) Quando multiplicamos ou dividimos os dois membros de uma igualdade por um número diferente de zero, a igualdade permanece verdadeira.

$$a = b \Leftrightarrow a \cdot e = b \cdot e$$

, u

$$a = b \Leftrightarrow \frac{a}{e} = \frac{b}{e}$$

Conseqüência

Observemos a equação:

$$-2x = 6$$

Dividindo por –2 os dois membros da igualdade, temos:

$$-2x = 6 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{6}{-2}$$

Assim:

$$-2x = 6 \Leftrightarrow x = -3$$

3. Equação do 1º Grau

Chamamos de equação do 1º grau as equações do tipo:

$$\boxed{ax + b = 0}$$

onde a e b são números conhecidos com $a \neq 0$.

Exemplo

$$3x - 5 = 0 \ (a = 3 \text{ e } b = -5)$$

Para resolvermos uma equação do 1º grau, devemos isolar a **incógnita** em um dos membros da igualdade, usando as propriedades $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ do item anterior.

Exemplo

Resolver em R a equação:

$3x - 5 = 0$

$$3x - 5 = 0 \overset{P_1}{\Leftrightarrow} 3x - 5 + 5 = 0 + 5$$

$$3x - 5 = 0 \overset{P_1}{\Leftrightarrow} 3x = 5$$

$$3x = 5 \overset{P_2}{\Leftrightarrow} \frac{3x}{3} = \frac{5}{3}$$

$$3x = 5 \overset{P_2}{\Leftrightarrow} x = \frac{5}{3}$$

Assim: $3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

De modo abreviado, fazemos:

$$3x - 5 = 0 \overset{P_1}{\Leftrightarrow} 3x = 5 \overset{P_2}{\Leftrightarrow} x = \frac{5}{3}$$

Assim:

$$\boxed{S = \left\{\frac{5}{3}\right\}}$$

Podemos estabelecer uma fórmula para resolver em R a equação:

$$\boxed{ab + b = 0 \ (a \neq 0)}$$

Assim:

$$ax + b = 0 \overset{P_1}{\Rightarrow} ax = -b \overset{P_2}{\Rightarrow} x = \frac{-b}{a}$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{-b}{a}\right\}}$$

Exemplo

Resolver em R a equação:

$$2x + 5 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} a = 2 \\ b = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{2}$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{-5}{2}\right\}}$$

4. Problemas do 1º Grau

Problema é uma proposição a resolver, na qual figuram elementos conhecidos ou supostamente conhecidos, chamados **dados**, e elementos desconhecidos, chamados **incógnitas**.

Resolver um problema é determinar os valores das incógnitas que satisfazem às condições impostas pelo enunciado.

A resolução de um problema possui três fases:

1) Colocar o problema em equação;

2) Resolver a equação ou equações do problema;

3) Interpretar os resultados ou fazer uma discussão sobre eles.

Exercícios Resolvidos

Resolver as equações:

01. $3x - 5 = 2x + 6$

Resolução

$3x - 2x = 6 + 5$

$x = 11$

$S = \{11\}$

02. $2(x + 3) + 3(x - 1) = 7(x + 2)$

Resolução

$2x + 6 + 3x - 3 = 7x + 14$

$2x + 3x - 7x = 14 + 3 - 6$

$-2x = 11$

$x = -\frac{11}{2} \qquad S = \left\{-\frac{11}{2}\right\}$

03. Dividindo o número x pelo número y, obtém-se quociente 1 e resto 5. Se o quádrupo de y dividido por x dá quociente 2 e resto 8, então:

a) $x + y = 32$
b) $y - x = 5$
c) $x - y = 5$
d) $x \cdot y = 76$
e) $x = 2y$

Resolução

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ \hline 5 & 1 \end{array} \rightarrow x = y + 5 \quad (1)$$

$$\begin{array}{r|l} 4y & x \\ \hline 8 & 2 \end{array} \rightarrow 4y = 2x + 8 \quad (2)$$

Substituindo 1 em 2 :

$4y = 2(y + 5) + 8$

$4y = 2y + 18$

$2y = 18 \rightarrow y = 9$

Substituindo $y = 9$ na 1:

$x = 9 + 5$

$x = 14$

Resposta: *C*

04. Um vidro cheio de remédio "pesa" 325 g. Se jogarmos metade do remédio fora, seu "peso "se reduz a 180 g. O "peso" do vidro vazio é:

a) 20 g
b) 25 g
c) 35 g
d) 45 g
e) nda

Resolução

$v + R = 325$

$R = 325 - v$

$v + \frac{R}{2} = 180$

$v + \frac{325 - v}{2} = 180$

$2v + 325 - v = 360$

$v = 35$

Resposta: *C*

5. Equação do 2º Grau

Chamamos de equação do 2º grau as equações do tipo:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

nas quais a, b e c são números conhecidos com $a \neq 0$.

Exemplos

a) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ ($a = 2$, $b = -3$ e $c = 5$)

b) $5x^2 + 7x = 0$ ($a = 5$, $b = 7$ e $c = 0$)

c) $4x^2 - 11 = 0$ ($a = 4$, $b = 0$ e $c = -11$)

5.1. Resolução da equação do 2º grau

Exemplos

a) Resolver em R a equação:

$$x^2 - 16 = 0$$

Notamos que nessa equação do 2º grau o coeficiente b é igual a zero e, por isto, ela é chamada de equação do 2º grau incompleta. Vamos acompanhar a sua resolução.

$x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16$

$x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = +4$

Assim:

$$\boxed{S = \{-4, +4\}}$$

b) Resolver em R a equação:

$$x^2 + 11x = 0$$

Notamos que, nessa equação do 2º grau, o coeficiente c é igual a zero e, por isto, ela é chamada, também, de equação do 2º grau incompleta. Vamos acompanhar a sua resolução.

$x^2 + 11x = 0 \Leftrightarrow x(x + 11) = 0$

$x^2 + 11x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x + 11 = 0$

$x^2 + 11x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -11$

Assim:

$$\boxed{S = \{-11, 0\}}$$

c) Resolver em R a equação:

$$x^2 + 4x + 4 = 16$$

Observamos que $x^2 + 4x + 4$ é, na sua forma fatorada, igual a $(x + 2)^2$, então:

$x^2 + 4x + 4 = 16$ passa a ser $(x + 2)^2 = 16$

Assim:

$x^2 + 4x + 4 = 16 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 16$

$x^2 + 4x + 4 = 16 \Leftrightarrow x + 2 = -4$ ou $x + 2 = 4$

$x^2 + 4x + 4 = 16 \Leftrightarrow x = -6$ ou $x = 2$

Assim:

$$\boxed{S = \{-6, 2\}}$$

d) Resolver em R a equação:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Observamos que $x^2 - 6x + 5$ **não** é um quadrado perfeito, donde se conclui que o procedimento utilizado no exemplo anterior não poderá ser repetido, a menos que façamos algumas modificações na equação, como veremos a seguir.

x^2 é "o quadrado do primeiro", $6x$ é "**duas vezes o primeiro** (que é x) **pelo segundo**", logo, o segundo só poderá ser o número 3 e, assim, "**o quadrado do segundo será igual a 9**". Como o quadrado perfeito só aparecerá se tivermos $x^2 - 6x + 9$, acrescentaremos aos dois membros da igualdade o número 9.

Assim:

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 + 9 = 9$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 4$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 4$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = -2$ ou $x - 3 = 2$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 5$

Assim:

$$S = \{1, 5\}$$

5.2. Fórmula de Bhaskara

Vamos resolver a equação: $ax^2 + bx + c = 0$, que é a forma geral da equação do 2º grau.

Inicialmente, multiplicamos os dois membros da igualdade por a. Teremos:

$$a^2x^2 + abx + ac = 0$$

Notamos que a expressão:

$$a^2a^2 + bxa + \frac{x^2}{4}$$

é um quadrado perfeito e, assim, podemos acrescentar aos dois membros da igualdade o número $\frac{b^2}{4}$.

$$a^2x^2 + abx + ac + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4}$$

Logo:

$ax^2 + bx + c = 0 \iff$

$$\iff a^2A^2 + abx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - ac$$

$ax^2 + bx + c = 0 \iff$

$$\iff \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$$

Chamando $b^2 - 4ac$ de **discriminante** da equação do 2º grau, que será representado pela letra grega Δ (delta), teremos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff ax + \frac{b}{2} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Dessa forma, resolvemos a equação do 2º grau com os coeficientes literais *a, b* e *c,* o que nos permite estabelecer uma fórmula já nossa conhecida, chamada "fórmula de Bhaskara", a qual resolverá qualquer equação do 2º grau, bastando substituir os coeficientes pelos números na equação a resolver.

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4cx}$$

Exemplo

Resolver em R a equação:

$5x^2 - 12x + 4 = 0$

Temos, $a = 5$, $b = -12$ e $c = 4$.

Substituindo na fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(5)(4)}}{2 \cdot 5}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{10} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{10}$$

$$x = \frac{12 \pm 8}{10}$$

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{5}$$

Assim: $S = \left\{\frac{2}{5} \quad 2\right\}$

Observação – Se a equação não estiver na forma $ax^2 + bx + c = 0$, deve ser preparada através das operações conhecidas, tais como, eliminação de denominadores, retirada de parênteses, dentre outras.

5.3. Discussão do Número de Soluções da Equação do 2º Grau

Quando resolvemos uma equação do 2º grau, já colocada na sua forma normal é importante observar que três casos podem surgir em relação ao cálculo do discriminante. Observe:

1º caso: $\Delta > 0 \rightarrow$ A equação terá duas raízes reais e distintas.

Exemplo - Resolver em R:

$x^2 - 6x - 27 = 0$

$a = 1,\ b = -6 \quad c = -27$

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(-27) = 144 > 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 12}{2}$$

$$x_1 = 9 \quad \text{ou} \quad x_2 = -3$$

Observe que $x_1 \neq x_2$.

Assim: $S = \{-3, 9\}$

2º caso: $\Delta = 0 \Rightarrow$ A equação terá duas raízes reais e iguais.

Exemplo

Resolver em R:

$4x^2 - 4x + 1 = 0$

$a = 4,\ b = -4$ e $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 0}{8}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Observe que $x_1 = x_2$.

Assim: $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

3º caso: $\Delta < 0 \Rightarrow$ A equação não terá raízes reais.

Exemplo

Resolver em R.

$3x^2 + 2x + 4 = 0$

$a = 3,\quad b = 2,\quad c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 48 = -44 < 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-44}}{6}$$

$\sqrt{-44} \notin R$ então não há raízes reais.

Assim:

$$S = \varnothing$$

Exercícios Resolvidos

Resolver em R as equações abaixo:

01. $\dfrac{x^2 - 4}{3} = \dfrac{x - 3}{2}$

Resolução

Devemos preparar a equação:

$2(x^2 - 4) = 3\ (x - 3)$

Retiramos os parênteses:

$2x^2 - 8 = 3x - 9$

Escrevemos na forma padrão:

$2x^2 - 3x + 1 = 0$

$a = 2,\ b = -3,\ c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)\ (1) = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$x = 1 \ \text{ ou } \ x = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$$

02. $2\,(x - 1)\,(3x - 7) + 12\,(x + 3) = 30\,(3x - 7)$

$6x^2 - 20x + 14 + 12x + 36 = 90x - 210$

$6x^2 - 98x + 260 = 0$

Resolução

Dividindo a equação por 2:

$3x^2 - 49x + 130 = 0$

$a = 3,\ b = -49,\ c = 130$

$\Delta = 841$

$$x = \frac{49 \pm 29}{6}$$

$$x = 13 \quad ou \quad x = \frac{10}{3}$$

$$S = \left\{\frac{10}{3}, 13\right\}$$

6. Relações entre Coeficientes e Raízes

As equações do 2º grau, $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, possuem duas notáveis relações entre as raízes x_1 e x_2 e os coeficientes a, b e c.

São chamadas de relações de Soma e Produto ou relações de **Girard**.

Consideremos a equação do 2º grau:

$ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e com as raízes:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Podemos estabelecer:

1º) A soma das raízes da equação do 2º grau por meio da relação:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b-\cancel{\sqrt{\Delta}}-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$

$$\boxed{S = \frac{-b}{a}}$$

2º) O produto das raízes da equação do 2º grau através da relação:

$$P = x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2}$$

$$P = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2}-(\cancel{b^2}-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\boxed{P = \frac{c}{a}}$$

A partir desses valores e, dividindo a equação $ax^2 + bx + c = 0$ pela constante a (coeficiente de x^2), teremos a equação apresentada pela igualdade:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

em que S é a soma de suas raízes e P é o produto delas.

Podemos dar a essa nova apresentação da equação do 2º grau duas utilizações práticas:

1º) Determinar uma equação do 2º grau cujas raízes sejam os números 2 e 7.

Tendo as raízes, podemos determinar:

$$S = 2 + 7 = 9 \quad \text{e} \quad P = 2 \cdot 7 = 14$$

Com esses valores, podemos montar a equação:

$$\boxed{x^2 - 9x + 14 = 0}$$

que é uma das equações do 2º grau cujas raízes são 2 e 7.

2º) Resolver a equação do 2º grau:

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Pela observação da sentença que representa a equação, temos:

$$S = 7 \text{ e } P = 12.$$

Basta, agora, com um "pouquinho" de criatividade, reconhecer dois números cuja soma é 7 e o produto é 12.

Claro que já percebemos que os números são 3 e 4. Portanto:

$$\boxed{S = \{3, 4\}}$$

7. Resolução de Equações com Mudança de Variável

Freqüentemente nos deparamos com equações que, mesmo não sendo do 2º grau, podem ser resolvidas com o auxílio dela. Nessas situações, devemos nos valer de mudanças nas variáveis da equação de tal forma que ela se transforme, temporariamente, numa equação do 2º grau, como nos exemplos que veremos a seguir:

Exemplos

a) Resolver a equação:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Notemos que esta é uma equação de quarto grau, porém com uma característica particular: apresenta apenas os termos de grau par.

Se fizermos:

$$x^2 = y$$

teremos:

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

Resolvendo esta equação, teremos:

$$y_1 = -1 \quad \text{e} \quad y_2 = 4$$

Considerando que y está ocupando o lugar de x^2, teremos:

$$x^2 = -1 \quad \text{ou} \quad x^2 = 4$$

Considerando $x \in R$, teremos:

$$x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

Assim sendo:

$$\boxed{S = \{-2, 2\}}$$

b) Resolver a equação:

$$(x^2 + x)^2 - 14\,(x^2 + x) + 24 = 0$$

Evidentemente, os produtos e as potências indicados podem ser desenvolvidos originando uma equação do quarto grau com uma certa complexidade na sua resolução. Observemos, por outro lado, que a expressão $(x^2 + x)$ se apresenta na equação mais de uma vez. Podemos tomar a iniciativa de substituí-la por uma única incógnita.

Se fizermos:

$$x^2 + x = m$$

teremos:

$$m^2 - 14m + 24 = 0$$

A resolução desta equação nos leva a dois valores de m: 2 e 12, que são, portanto, os valores de $x^2 + x$.

Logo:

$$x^2 + x = 2 \quad \text{ou} \quad x^2 + x = 12$$

Assim, determinaremos duas equações do 2º grau:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

e

$$x^2 + x - 12 = 0$$

cujas soluções representarão as soluções da equação original. Assim sendo, e pela resolução destas equações, teremos:

$$\boxed{S = \{-4, -2, 1, 3\}}$$

Exercícios Resolvidos

01. Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $3x^2 - kx - 1 = 0$.

Se $x_1^2 + x_2^2 = 1$, então k^2 é igual a:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

Resolução

Sabemos que $x_1 + x_2 = \dfrac{x}{3}$ *e* $a_1 \cdot a_2 = -\dfrac{1}{3}$

$$(x_1 + x_2)^2 = \left(\frac{k}{◎}\right)^2$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = \frac{k^2}{1}$$

$$\underbrace{x_1^2 + x_2^2} + \underbrace{2x_1x_2} = \frac{k^2}{9}$$

$$1 + 2\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{k^2}{9}$$

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{k^2}{9}$$

$$\frac{9}{3} = \frac{k^2}{◎} \Rightarrow k^2 = 3$$

Resposta: B

02. Resolver, em R, a equação:

$x^6 - 28x^3 + 27 = 0$

Resolução

Fazendo $x^3 = t$, *teremos* $x^6 = t^2$, *logo*

$t^2 - 28t + 27 = 0$

$\Delta = 7o4 - 10o = 676$

$$t = \frac{28 \pm 26}{2} = \begin{cases} t_1 = 27 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Então, teremos:

$x^3 = 27$	$x^3 = 1$
$x^3 = 3^3$	$x^3 = 1^3$
$x = 3$	$x = 1$

Resposta: $S = \{1, 3\}$

03. Deteremine m, positivo, para o qual uma das raízes da equação $x^2 - 3mx + 5m = 0$ é o dobro da outra.

Resolução

As raízes são x_1 *e* x_2

$x_2 = 2x_1$

Sabemos que

$$a_1 + a_2 = \frac{-b}{n} = 3m$$

$x_1 + 2x_1 = 3m$

$3x_1 = 3m$

$\|a_1 = x\|$

$2x_1 = 2m$, *então*

$\|c_2 = 2x\|$

Como $c_1 \cdot c_2 = \frac{a}{n}$, *temos:*

$m \cdot 2m = 5m$

$2m^2 = 5m$

$2m^2 - 5m = 0$

$$m\,(2m - 5) = 0 \quad \begin{cases} m = 0 & \text{(não convém)} \\ m = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

As raízes serão

$x_1 = m = 5/2$

$x_2 = 2m = 5$

Resposta: $m = \dfrac{5}{2}$

8. Equações Irracionais

Equação Irracional é uma equação em que há incógnita em um ou mais radicais. São equações irracionais:

1) $\sqrt[3]{x+2} = 5$

2) $\sqrt{x+1} = x - 2$

3) $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} = 6$

As raízes podem ter qualquer índice, mas no nosso estudo trataremos apenas das equações irracionais que apresentarem raízes quadradas. Não existe fórmula para resolver essas equações, mas temos um processo de resolução prático e seguro que nos conduz a equações cuja resolução já conhecemos.

Vamos acompanhar o método por meio de um exemplo.

Resolver a equação:

$$\sqrt{x+3} + x = 3$$

1º passo: Isolamos o radical num dos membros da equação. Se existir mais de um radical, escolher um deles e isolar.

$$\sqrt{x+3} = 3 - x$$

2º passo: Elevamos ao quadrado os dois membros da equação.

$$\left(\sqrt{c+3}\right)^2 = (3 - c)^2$$

$$x + 3 = 9 - 6x + x^2$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

3º passo: Resolvemos a equação.

Se na primeira vez que elevarmos a equação ao quadrado, continuar a existir a raiz quadrada, ela deve ser isolada e a equação será novamente elevada ao quadrado tantas vezes forem necessárias até que não exista mais nenhum radical.

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

que resolvida: $x = 1$ ou $x = 6$.

4º passo: Dessa maneira, obtemos uma outra equação que não tem, necessariamente, o mesmo conjunto verdade da equação proposta. Quase sempre, a última equação admite todas as raízes da primeira e mais algumas raízes, chamadas de **raízes estranhas,** que não são raízes da primeira equação.

Para contornar este problema, iremos efetuar uma verificação para eliminar as raízes estranhas e obter o conjunto solução correto. Esta verificação consiste em substituir na equação original os valores de x obtidos.

Observe:

para $x = 1$: $\sqrt{1+3} + 1 = 3$

$\sqrt{4} + 3 = 6$

$2 + 1 = 3$ (V)

para $x = 6$: $\sqrt{◎ + 3} + ◎ = 3$

$\sqrt{9} + 6 = 3$

$3 + 6 = 3$

$9 = 3$ (F)

Notamos que 1 é solução da equação mas 6 não é, assim sendo:

$S = \{1\}$

9. Mudança de Variável

Como já vimos a mudança de variável tem o objetivo de facilitar a resolução de equações que apresentem grau de dificuldade considerável. Veremos alguns exemplos de resolução a seguir.

Exemplos

a) Resolver em R a equação

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Mudar a variável $x^2 = t$ (1)

Evidentemente $x^4 = t^2$, e teremos:

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Voltando em 1:

$x^2 = 4$ $\quad$ $x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{4}$ $\quad$ $x = \pm\sqrt{1}$

$x = \pm 2$ $\quad$ $x = \pm 1$

Daí, teremos:

$$S = \{-2, -1, 1, 2\}$$

b) Resolver em R a equação

$$x^2 - 4x + 5 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \ (x \neq 0)$$

Primeiro, arrumamos a equação:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 4x - \frac{4}{x} + 5 = 0$$

$$\left(c^2 + \frac{1}{c^2}\right) - 4\left(c + \frac{1}{c}\right) + 5 = 0 \qquad (1)$$

Faremos a seguinte troca:

$$c + \frac{1}{c} = x$$

Elevando ao quadrado, teremos:

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

Substituindo em (1):

$(t^2 - 2) - 4t + 5 = 0$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$$t = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} t = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$

Voltando à mudança variável:

$x + \frac{1}{x} = 3$ $\quad$ $x + \frac{1}{x} = 1$

$x^2 - 3x + 1 = 0$ $\quad$ $x^2 - x + 1 = 3$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\quad$ $x = \frac{1 \pm \sqrt{-2}}{n}$ não é real

Daí, teremos:

$$S = \left\{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right\}$$

Exercícios Resolvidos

01. Resolver em R a equação:

$$\underbrace{\sqrt{5-x}} + \sqrt{x} - 3 = 0$$

Resolução

- *Isolar o radical assinalado (pode ser o outro).*

$$\sqrt{5-x} = 3 - \sqrt{x}$$

- *Elevar ao quadrado:*

$$\left(\sqrt{5-c}\right)^2 = \left(3-\sqrt{c}\right)^2$$

$$5 - x = 6 - 6\sqrt{x} + x$$

- *Isolar novamente o radical:*

$$◎\sqrt{\cancel{x}} = 5 + \cancel{x} + \cancel{x} - 5$$

$$◎\sqrt{x} = 2x + 4$$

- *Elevar ao quadrado novamente:*

$36x = 4x^2 + 16x + 16$

$4x^2 - 20x + 16 = 0 \quad (\div)\,4$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$x = 4$ *ou* $x = 1$

- *Fazendo a verificação:*

para $x = 4$: $\sqrt{5-4} + \sqrt{4} - 3 = 0$

$$\sqrt{1} + 2 - 3 = 0$$

$$1 + 2 - 3 = 0 \qquad (V)$$

para $x = 1$: $\sqrt{5-1} + \sqrt{1} - 3 = 0$

$$\sqrt{4} + 1 - 3 = 0$$

$$2 + 1 - 3 = 0 \qquad (V)$$

Então, 4 e 1 são raízes, logo:

$$S = \{1, 4\}$$

02. Resolver em R a equação

$$\sqrt{x^2+9} + \frac{15}{\sqrt{x^2+9}} = 8$$

Resolução

Vamos fazer a substituição:

$$\sqrt{c^2+9} = x \qquad (1)$$

Teremos:

$$t + \frac{15}{t} = 8$$

$t^2 + 15 = 8t$

$t^2 - 8t + 15 = 0$

$$t = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} t_1 = 5 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

Voltando a (1):

$\sqrt{x^2+9} = 5$	$\sqrt{x^2+9} = 9$
$x^2 + 9 = 25$	$x^2 + 0 = 0$
$x^2 = 16$	$x^2 = ◎$
$x = \pm 4$	$x = ◎$

Daí, teremos:

$S = \{-4, 0, 4\}$ **Verifique!**